TD 1
Cinématique

Exercice 1 : Écoulement stationnaire

L'écoulement stationnaire d'un fluide soumis à une différence de pression et situé entre deux plans parallèles placés en $y = \pm d/2$ est caractérisé par le champ de vitesse

$$\vec{v}(x, y, z) = v_0 \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right) \hat{x},$$

où v_0 est une constante.

1. Comment définir un régime d'écoulement permanent (ou stationnaire) ? Est-ce le cas ici ?
2. L'écoulement est-il incompressible ?
3. Déterminer les lignes de courant.
4. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ d'une particule de fluide.
5. Calculer le vecteur tourbillon (ou vorticité). L'écoulement est-il irrotationnel ?

Exercice 2 : Champ de vitesse et accélération

On considère un écoulement permanent défini dans un repère (O, x, y, z) par le champ de vitesse

$$\vec{v}(x, y, z) = (2x - 3z)\hat{x} + (3x - 2z)\hat{z}$$

1. L'écoulement est-il incompressible ?
2. Calculer l'accélération $\vec{a}$ d'une particule de fluide.
3. Déterminer les équations des lignes de courant.

Exercice 3 : La houle

La houle est un mouvement ondulatoire de la surface de l'eau qui est formé par le vent. On peut caractériser la houle par la propagation d'une onde bidimensionnelle dont le champ de vitesse est de la forme

$$\vec{v}(\vec{r}) = A\omega\, \mathrm{e}^{kz} \left[\cos(kx - \omega t)\hat{x} + \sin(kx - \omega t)\hat{z}\right]$$

où A est l'amplitude de l'onde, ω sa pulsation et k son vecteur d'onde.

1. L'écoulement est-il stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ?
2. Déterminer le vecteur accélération.
3. Démontrer que pour tout écoulement irrotationnel, on parle également d'écoulement *potentiel*, ce qui signifie que l'on peut écrire $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, où $\phi(\vec{r}, t)$ est le potentiel des vitesses.

Exercice 4 : Écoulement radial

Un écoulement bidimensionnel est décrit en coordonnées polaires par le champ de vitesse

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{k}{r}\,\hat{r}$$

avec $k = 4\,\mathrm{m^2s^{-1}}$.

1. Représenter en différents points le vecteur vitesse et déduire l'allure des lignes d'écoulement. L'écoulement est-il permanent ?
2. Quelle est l'équation horaire $r(t)$ d'une particule de fluide située en r_0 à $t = 0$?
3. À l'instant $t = 0$, on considère la portion de fluide définie par

$$1\,\mathrm{m} \leqslant r \leqslant 2\,\mathrm{m} \quad \text{et} \quad 30° \leqslant \theta \leqslant 60°.$$

   Dessiner cette portion à $t = 0$ et calculer son aire $\mathcal{A}_0$.
4. Cette portion suit le flot de l'écoulement tout en se déformant. Représenter cette portion à l'instant $t = 1\,\mathrm{s}$. Cet élément de fluide s'est-il dilaté ? Qu'en est-il à chaque instant t ? En déduire le caractère compressible ou incompressible de l'écoulement.
5. Vérifier la réponse à la question précédente en calculant $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$.

Données : En coordonnées polaires, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,(r v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$.

Exercice 5 : Écoulement d'air dans une conduite

On considère un écoulement d'air dans une conduite de 20 cm de diamètre, à une pression de 300 kPa, une température de 20° C et une vitesse de $3.0\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Sachant que cet air peut être considéré comme un gaz parfait, calculer le débit massique.

Exercice 6 : Tornade

Le champ de vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} \omega r\,\hat{\theta}, & r \leqslant a, \\ \dfrac{K}{r}\,\hat{\theta}, & r > a, \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes.

1. Sachant que le champ de vitesse ne présente pas de discontinuité, déterminer K.
2. Représenter le champ de vitesse en traçant la fonction $v_\theta(r)$, puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Quelle est l'allure des lignes de courant ?
3. Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.
4. L'écoulement est-il irrotationnel ?

Données : En coordonnées cylindriques,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}.$$