Contrôle continu n° 2

Mercredi 20 mai 2020, 9 h
Examen à distance
Durée de l'épreuve : 2 h
Le sujet comprend 6 pages au total

Instructions

L'examen suivant est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM). Il s'agira pour chaque question de déterminer quelle est la bonne réponse parmi les choix donnés. ***Aucune démonstration n'est demandée.*** *Les réponses sont à renvoyer pour le* ***20 mai 2020, 11h00, heure de Paris*** *(en utilisant par exemple le fichier ci-joint) par email à l'adresse suivante : guillaume.weick@ipcms.unistra.fr. En cas de question lors de l'examen, vous pouvez soit m'envoyer un email à l'adresse ci-dessus en me donnant votre numéro de téléphone, et je vous rappellerai immédiatement, soit me contacter sur Skype (identifiant : guillaume.weick).*

Exercice 1

Un bloc de masse M dans le champ de gravitation terrestre (accélération de la pesanteur $\mathbf{g}$) est positionné sous un dévers qui fait un angle β avec l'horizontale ($0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$). On applique une force horizontale de magnitude Mg à ce bloc, comme le montre la Fig. 1. On suppose que la force de friction entre le bloc et le dévers est suffisante afin de maintenir le bloc statique. Soit μ le cœfficent de friction statique entre le bloc et le dévers. Soient $\hat{\mathbf{x}}'$ et $\hat{\mathbf{y}}'$ les vecteurs unitaires, respectivement, selon le dévers et perpendiculaire au dévers (voir Fig. 1).

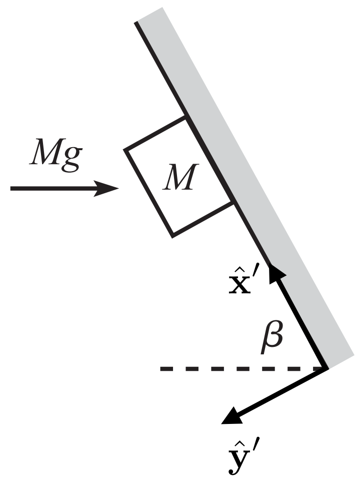

FIG. 1:

1/ Question : Déterminez (en norme et en direction) la force normale $\mathbf{N}$ et la force de friction $\mathbf{F}_\mathrm{f}$ que le dévers exercent sur le bloc.
Réponse :
(a) $\mathbf{N} = Mg(\sin\beta + \cos\beta)\,\hat{\mathbf{y}}'$ et $\mathbf{F}_\mathrm{f} = Mg(\sin\beta - \cos\beta)\,\hat{\mathbf{x}}'$
(b) $\mathbf{N} = Mg(\sin\beta - \cos\beta)\,\hat{\mathbf{y}}'$ et $\mathbf{F}_\mathrm{f} = Mg(\sin\beta + \cos\beta)\,\hat{\mathbf{x}}'$
(c) $\mathbf{N} = Mg(\cos\beta - \sin\beta)\,\hat{\mathbf{y}}'$ et $\mathbf{F}_\mathrm{f} = Mg(\sin\beta + \cos\beta)\,\hat{\mathbf{x}}'$

2/ Question : À aide de votre expression pour $\mathbf{N}$, montrez dans un premier temps que les seules valeurs possibles pour l'angle β afin que le système reste statique sont telles que $\beta_1 < \beta \leqslant \beta_2$, avec
Réponse :
(a) $\beta_1 = \pi/4$ et $\beta_2 = \pi/2$
(b) $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = \pi/4$
(c) $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 = \pi/2$
(d) $\beta_1 = \pi/3$ et $\beta_2 = \pi/2$

3/ Question : En utilisant la relation entre la force normale et la force de friction, montrez dans un deuxième temps que les valeurs de β telles que le bloc soit statique sont données par la relation
Réponse :
(a)
$$\tan\beta \geqslant \frac{\mu-1}{\mu+1}$$
(b)
$$\tan\beta \leqslant \frac{\mu+1}{\mu-1}$$
(c)
$$\tan\beta \geqslant \frac{\mu+1}{\mu-1}$$
(d)
$$\tan\beta \leqslant \frac{\mu-1}{\mu+1}$$
avec $\mu > 1$.

Exercice 2

Un projectile ponctuel de masse m soumis à l'attraction terrestre (on note $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur), initialement au niveau du sol (supposé parfaitement plat) et à l'origine des coordonnées, est lancé à l'instant initial $t_0 = 0$ dans une certaine direction avec la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ qui forme un angle α avec le sol, comme le montre la Fig. 2. Dans la suite, on prend en compte les frottements de l'air. On suppose que la force de frottement a pour expression $\mathbf{F}_{\mathrm{fr}} = -m\gamma\mathbf{v}$, où $\gamma \geqslant 0$ est la constante de frottement et où $\mathbf{v}$ est la vitesse du projectile.

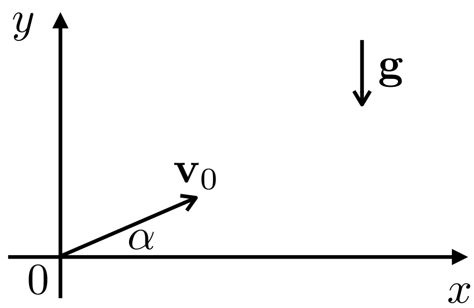

Fig. 2:

1/ Question : À l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique, déterminez les équations du mouvement selon x et y.
Réponse :

(a) $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}, \qquad \ddot{y} = g - \gamma\dot{y}$

(b) $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}, \qquad \ddot{y} = -g - \gamma\dot{y}$

(c) $\ddot{x} = -\gamma\dot{y}, \qquad \ddot{y} = -g - \gamma\dot{x}$

(d) $\ddot{x} = -\gamma\dot{y}, \qquad \ddot{y} = g - \gamma\dot{x}$

2/ Question : En déduire la vitesse $\big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big)$ de la particule à tout instant $t \geqslant 0$.
Réponse :

(a)
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t}, \qquad \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right)$$

(b)
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t}, \qquad \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

(c)
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t}, \qquad \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha\, \mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right)$$

(d)
$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha\, \mathrm{e}^{\gamma t}, \qquad \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha\, \mathrm{e}^{\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right)$$

3/ Question : Déterminez la trajectoire $\big(x(t), y(t)\big)$ de la particule à tout instant $t \geqslant 0$.
Réponse :

(a)
$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} + 1\right), \qquad y(t) = \frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma^2}\left(\gamma t + \mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right)$$

(b)
$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right), \qquad y(t) = \frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right)$$

(c)
$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right), \qquad y(t) = \frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma^2}\left(\gamma t + \mathrm{e}^{-\gamma t}\right)$$

(d) aucune des réponses ci-dessus n'est la bonne

4/ Question : Pour $\gamma = 0$, montrez que la trajectoire de la particule décrit une parabole dans le plan $(0xy)$, dont l'équation est donnée par
Réponse :

(a)
$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}\, x^2 + \tan(\alpha)\, x$$

(b)
$$y = -\frac{g}{2(v_0 \sin\alpha)^2}\, x^2 + \tan(\alpha)\, x$$

(c)
$$y = \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}\, x^2 + \tan(\alpha)\, x$$

(d)
$$y = -\frac{g}{2(v_0 \sin\alpha)^2}\, x^2 + \cos(\alpha)\, x$$

Exercice 3

Un cylindre de rayon R, de densité de masse uniforme et de masse totale M se situe sur un plan incliné qui fait un angle θ avec l'horizontale. Une corde inextensible, et dont on négligera la masse, est attachée au point le plus à droite du cylindre, et une masse ponctuelle m est suspendue à cette corde (voir Fig. 3). On suppose que le cœfficient de friction entre le plan incliné et le cylindre est suffisamment grand de telle sorte que le cylindre ne glisse pas sur le plan.

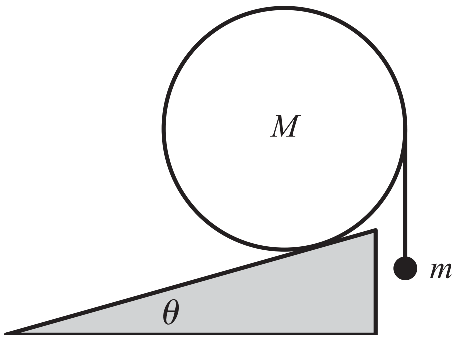

FIG. 3:

1/ Question : Déterminez m en fonction de M et θ si le système est statique.
Réponse :

(a)
$$m = \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} M$$

(b)
$$m = \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} M$$

(c)
$$m = \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} M$$

(d)
$$m = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} M$$

2/ Question : Analysez les cas limites $\theta \to 0$ et $\theta \to \pi/2$.
Réponse :

(a) $\lim_{\theta\to 0}\{m\} = 0$ et $\lim_{\theta\to\pi/2}\{m\} = M$

(b) $\lim_{\theta\to 0}\{m\} = 0$ et $\lim_{\theta\to\pi/2}\{m\} = \infty$

(c) $\lim_{\theta\to 0}\{m\} = \infty$ et $\lim_{\theta\to\pi/2}\{m\} = 0$

(d) $\lim_{\theta\to 0}\{m\} = M$ et $\lim_{\theta\to\pi/2}\{m\} = \infty$

Exercice 4

On considère le choc élastique unidimensionnel de deux particules non-relativistes de même masse m, considérées comme ponctuelles. Avant le choc des deux particules, la masse de gauche en mouvement rectiligne uniforme vers la droite a une vitesse $2v$, alors que la masse de droite (en mouvement rectiligne uniforme vers la gauche) a une vitesse $-v$. On appelle v_1 et v_2 les vitesses des particules de gauche et droite après le choc, avec v_1 et v_2 comptées positives vers la droite (voir Fig. 4). Dans la suite, on néglige l'attraction gravitationnelle entre les deux masses

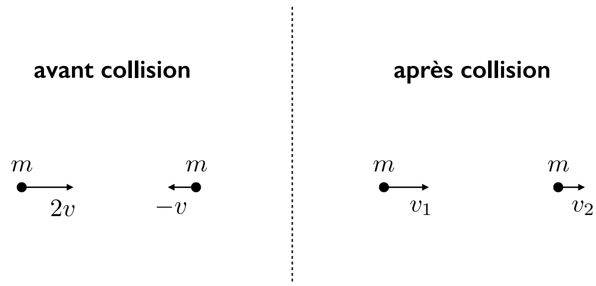

Fig. 4:

et on suppose que la collision a lieu dans le vide.

Question : Calculez les vitesses v_1 et v_2 des deux particules après le choc.
Réponse :

(a) $v_1 = v$ et $v_2 = 3v$
(b) $v_1 = -v$ et $v_2 = 4v$
(c) $v_1 = -v$ et $v_2 = 2v$
(d) $v_1 = -2v$ et $v_2 = 5v$
(e) $v_1 = -v/2$ et $v_2 = v$
(f) aucune des réponses ci-dessus n'est la bonne

Exercice 5

On considère le système de la Fig. 5 : dans le champ de gravitation (accélération de la pesanteur $\mathbf{g}$), une masse ponctuelle M se situe sur un plan incliné (d'angle α). À cette masse est attaché un pendule simple, de longueur constante ℓ et de masse m (également ponctuelle). Dans la suite, on néglige toute friction, et l'on suppose que le mouvement a lieu dans le plan $(0xy)$.

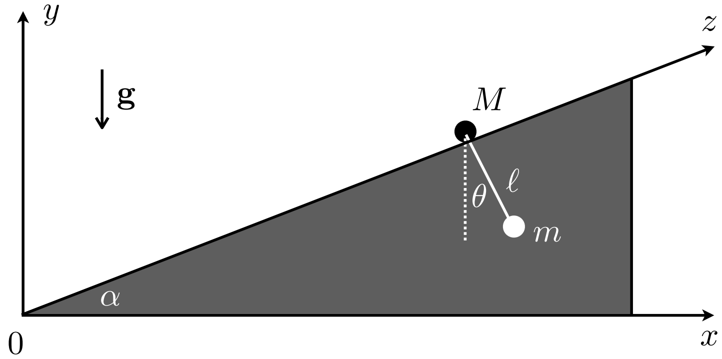

Fig. 5:

1/ Question : Déterminez les positions $(x, y)_M$ et $(x, y)_m$ des deux masses M et m en fonction de z (position de la masse M le long du plan incliné), de l'angle θ que fait la masse m avec la verticale, et de l'angle α.
Réponse :

(a) $(x, y)_M = (z \cos \alpha, z \sin \alpha)$ et $(x, y)_m = (z \cos \alpha - \ell \sin \theta, z \sin \alpha + \ell \cos \theta)$
(b) $(x, y)_M = (z \cos \alpha, z \sin \alpha)$ et $(x, y)_m = (z \cos \alpha + \ell \sin \theta, z \sin \alpha - \ell \cos \theta)$
(c) $(x, y)_M = (z \cos \alpha, -z \sin \alpha)$ et $(x, y)_m = (z \cos \alpha + \ell \sin \theta, -z \sin \alpha - \ell \cos \theta)$

2/ <u>Question</u> : Déterminez le lagrangien $\mathcal{L}$ du système en fonction des coordonnées généralisées z et θ.

<u>Réponse</u> :

(a)

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{z}\ell\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)\right] + (M+m)gz\sin\alpha - mg\ell\cos\theta$$

(b)

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)\right] - (M+m)gz\sin\alpha + mg\ell\cos\theta$$

(c)

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{z}\ell\dot{\theta}\cos(\theta-\alpha)\right] - (M+m)gz\sin\alpha + mg\ell\cos\theta$$

(d)

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{z}\ell\dot{\theta}\sin(\theta-\alpha)\right] - (M+m)gz\sin\alpha + mg\ell\cos\theta$$

3/ <u>Question</u> : En déduire les équations du mouvement.

<u>Réponse</u> :

(a)

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z} + m\ell\left[\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)\right] = -(M+m)g\sin\alpha \\ \ell\ddot{\theta} + \ddot{z}\cos(\theta-\alpha) = -g\sin\theta\end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z} + m\ell\left[\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha) + \dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)\right] = -(M+m)g\sin\alpha \\ \ell\ddot{\theta} + \ddot{z}\cos(\theta-\alpha) = g\sin\theta\end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z} + m\ell\dot{\theta}\left[\cos(\theta-\alpha) - \sin(\theta-\alpha)\right] = -(M+m)g\sin\alpha \\ \ell\ddot{\theta} - \ddot{z}\cos(\theta-\alpha) = -g\sin\theta\end{cases}$$