

## Examen — Session 1

Durée : 2 h

Documents, téléphones portables, et calculatrices interdits  
Le sujet comprend 4 pages au total

### 1 Le modèle de Blume–Capel [~14 points]

Le modèle de Blume–Capel décrit un matériau magnétique avec quelques lacunes non magnétiques. Considérons un réseau [nous désignons par  $N (\gg 1)$  le nombre de sites du réseau et par  $z$  le nombre de plus proches voisins] de spins  $S_i$  qui peuvent prendre les valeurs  $-1, 0$  et  $+1$ . Un spin  $0$  correspond à une lacune (impureté non magnétique ou site vide) et les spins  $+1$  ou  $-1$  correspondent aux deux orientations différentes des espèces magnétiques. Nous supposons que le hamiltonien du système en présence d'un champ magnétique homogène  $h$  est donné par

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 - h \sum_{i=1}^N S_i, \quad (1.1)$$

où  $J > 0$  est l'interaction d'échange et où  $\Delta$  est une constante qui peut être négative ou positive. Dans le hamiltonien ci-dessus,  $\langle i, j \rangle$  dénote une somme sur les proches voisins.

#### 1.1 Discussion générale

- Justifiez que  $-\Delta$  est l'énergie de création d'une lacune. Dans quel cas ( $\Delta > 0$  ou  $\Delta < 0$ ) est-il favorable de créer une lacune ?
- À  $T = 0$  et  $h = 0$ , calculez l'énergie du système dans les trois états différents  $\langle S_i \rangle = +1$ ,  $\langle S_i \rangle = -1$  et  $\langle S_i \rangle = 0$ . Quel état est sélectionné à  $T = 0$  ?
- Quelle limite de  $\Delta$  correspond au modèle d'Ising usuel à deux états ? Comment appelleriez-vous le modèle  $\Delta = 0$  ?

#### 1.2 Approximation de champ moyen

Nous visons maintenant à effectuer une approximation de champ moyen (ACM). Nous écrivons  $S_i = m + \delta S_i$ , où  $m = \langle S_i \rangle$  est l'aimantation moyenne.

- Définissez la fonction de corrélation spin-spin  $C_{ij}$ . Quelle est la valeur de  $C_{ij}$  dans l'ACM ?
- Montrez que dans l'ACM, il est possible d'écrire le hamiltonien (1.1) comme

$$\mathcal{H} \simeq \frac{1}{2} N z J m^2 - (h + z J m) \sum_{i=1}^N S_i + \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2.$$

- Calculez l'énergie libre  $F$  dans l'ACM.
- Démontrez que la valeur moyenne  $m = \langle S_i \rangle$  est donnée par l'expression

$$m = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}.$$

En déduire que, dans l'ACM, l'aimantation obéit à l'équation auto-cohérente (EAC)

$$m = \frac{2 \sinh(\beta[h + z J m])}{\exp(\beta \Delta) + 2 \cosh(\beta[h + z J m])}.$$

**Dans la suite de l'exercice, on considère le cas de champ magnétique nul,  $h = 0$ .**

- (e) Dans le cas  $\Delta \rightarrow -\infty$ , discutez des solutions de l'EAC.  
 (f) Dans le cas général, montrez que  $m = 0$  est solution de l'EAC.  
 (g) Nous visons maintenant à discuter graphiquement les solutions de l'EAC. Nous définissons  $t = k_B T / zJ$  et  $\delta = \Delta / zJ$ .
- (i) Exprimez l'EAC en terme de la fonction

$$f(m) = \frac{2 \sinh(m/t)}{\exp(\delta/t) + 2 \cosh(m/t)}.$$

- (ii) Quelle est la valeur de  $f(0)$  ?  
 (iii) Quelles sont les limites de  $f(m)$  lorsque  $m \rightarrow \pm\infty$  ?  
 (iv) Calculez

$$\left. \frac{df}{dm} \right|_{m=0}$$

et discutez graphiquement du nombre de solutions à l'EAC. Montrez qu'il existe une température critique réduite  $t_c$  définie par l'équation

$$t_c = \frac{2}{2 + \exp(\delta/t_c)}.$$

- (v) Dans la figure 1 (lignes colorées) est tracée la fonction  $g(t, \delta) = 2/[2 + \exp(\delta/t)]$  en fonction de  $t$  pour différentes valeurs  $\delta_i$  de  $\delta$ . Quels  $\delta_i$  sont positifs et lesquels sont négatifs ? Triez par ordre croissant les  $\delta_i$ .

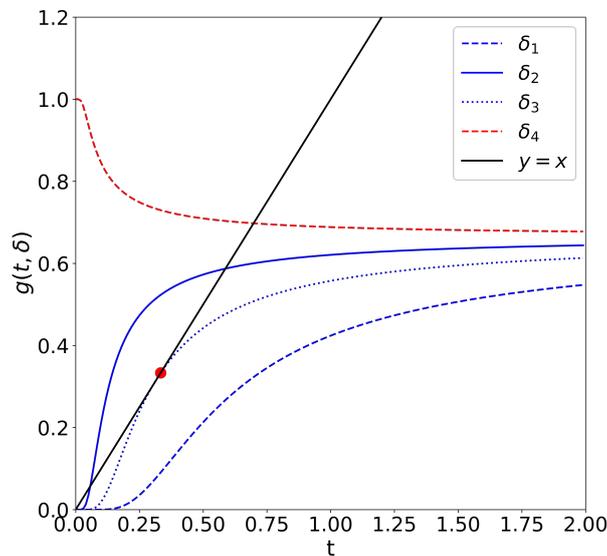


FIG. 1 – Lignes colorées : tracé de  $g(t, \delta) = 2/[2 + \exp(\delta/t)]$  en fonction de  $t$  pour différentes valeurs  $\delta_i$  de  $\delta$ . Ligne continue noire :  $t$ .

- (vi) Tracez la courbe  $g(t, \delta)$  pour la valeur de  $\delta$  correspondant au modèle d'Ising et donnez la  $t_c$  correspondante.  
 (vii) En utilisant la discussion précédente et la question 1.1(b), esquissez le comportement général de  $t_c$  en fonction de  $\delta$ .

## 2 Paramagnétisme de Pauli d'un gaz d'électrons bidimensionnel [ $\sim 6$ points]

Dans cet exercice, nous souhaitons comprendre l'une des propriétés magnétiques d'un gaz d'électrons sans interaction : le paramagnétisme de Pauli, qui est dû à l'alignement des moments magnétiques électroniques avec le champ magnétique appliqué. Le hamiltonien à un électron décrivant ce phénomène est donné par

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_z B. \quad (2.1)$$

Ici,  $\mathbf{p}$  est le moment des électrons,  $m$  sa masse,  $\mu_z = qS_z/m$  son moment magnétique, qui est lié à son spin  $S_z$  à travers le facteur gyromagnétique  $\gamma = q/m$ , où  $q = -e$  (avec  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C la charge élémentaire). Dans ce qui suit, nous considérons un champ magnétique homogène  $B$  parallèle à l'axe  $z$ , et nous supposons que les électrons sont confinés à une surface rectangulaire à deux dimensions d'aire  $\mathcal{A} = L_x L_y$ , où  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions latérales du gaz électronique dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement.

Nous rappelons que les électrons sont des particules de spin  $1/2$ , de sorte qu'ils obéissent à la statistique de Fermi–Dirac. L'occupation moyenne d'un état d'énergie  $\epsilon$  est alors donnée par

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}, \quad (2.2)$$

où  $\beta = 1/k_B T$ , avec  $T$  la température du gaz, et où  $\mu = \mu(T)$  est le potentiel chimique.

### 2.1 Pour démarrer

- Tracez la distribution de Fermi–Dirac (2.2) pour  $T = 0$  et  $T \neq 0$ .
- Comment est définie l'énergie de Fermi  $\epsilon_F$  en termes de  $\mu$  ?
- En l'absence de champ magnétique, le hamiltonien (2.1) se réduit à

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (2.3)$$

En utilisant des conditions aux limites périodiques, on peut facilement montrer que le spectre correspondant au hamiltonien (2.3) est donné par  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / 2m$ , où le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  est quantifié selon  $k_x = 2\pi n_x / L_x$  et  $k_y = 2\pi n_y / L_y$ , avec  $n_x$  et  $n_y$  des entiers relatifs. Montrez que la densité d'états correspondante (prenant en compte la dégénérescence de spin) est indépendante de l'énergie et est donnée dans la limite thermodynamique par

$$\rho_0 = \frac{m\mathcal{A}}{\pi \hbar^2}. \quad (2.4)$$

- Toujours en l'absence de champ magnétique, montrez que  $\epsilon_F = N/\rho_0$ , où  $N$  est le nombre total d'électrons dans le gaz bidimensionnel.

### 2.2 Paramagnétisme de Pauli

Le spectre correspondant au hamiltonien (2.1) dépend du spin et est donné par

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m_*} \mp \epsilon_B,$$

où  $+$  ( $-$ ) correspond à un électron de spin up (down). Ici,  $\epsilon_B = \mu_B B$ , avec  $\mu_B = \hbar q / 2m$  le magnéton de Bohr.

- Montrez que la densité d'états des deux espèces de spin dépend de l'énergie et est donnée par

$$\rho_{\pm}(\epsilon) = \frac{1}{2} \rho_0 \theta(\epsilon \pm \epsilon_B),$$

où  $\theta(x)$  est la fonction de Heaviside.

- (b) Supposons dans un premier temps que la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu$  soient tous deux fixes. Montrez que les nombres moyens d'électrons de spin up et de spin down, notés  $N_{\pm}$ , sont donnés par

$$N_{\pm} = \frac{\rho_0}{2\beta} \ln \left( 1 + e^{\beta[\pm\epsilon_B + \mu]} \right).$$

- (c) Considérons maintenant que le nombre total d'électrons  $N = N_+ + N_-$  est fixe. Déduire de la question précédente une équation quadratique pour la fugacité  $z = e^{\beta\mu}$ . Donnez l'expression résultante du potentiel chimique en fonction de  $\epsilon_F$  et  $\epsilon_B$ . En particulier, analysez les limites de basse température ( $\beta\epsilon_F \gg 1$ ) et de faible champ magnétique ( $\beta\epsilon_B \ll 1$ ).
- (d) L'aimantation du gaz d'électrons est donnée par  $M = \mu_B(N_+ - N_-)/\mathcal{A}$ , et la susceptibilité correspondante est définie comme

$$\chi_P = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B}.$$

Calculez la susceptibilité de Pauli  $\chi_P$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mu_B$  dans la limite dégénérée  $\beta\epsilon_F \gg 1$ .