TD 4
Mécanique du solide

Mouvement dans le plan d'objets planaires – Moment d'inertie

1 Centre de masse

Déterminez le centre de masse des objets suivants :

(a) une tige de longueur L, de densité de masse linéique $\lambda(x) = \alpha x$, où α est une constante (quelle est sa dimension ?) et où l'origine des coordonnées est prise à l'une des extrémités de la tige ;

(b) un hémisphère creux de rayon R et de densité surfacique de masse uniforme σ.

2 Moment d'inertie

Calculez le moment d'inertie autour d'un axe spécifique des objets de masse M suivants. On supposera que la densité de masse (par unité de longueur, d'aire, ou de volume selon les cas) est uniforme.

(a) Carré de côté a [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan].

(b) Rectangle de grand côté b et de petit côté c [axe passant par le centre, perp. au plan].

(c) Anneau de rayon R [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan, Fig. 1(i)].

(d) Anneau de rayon R [axe passant par le centre, dans le plan, Fig. 1(i)].

(e) Disque de rayon R [axe passant par le centre, perpendiculaire au plan, Fig. 1(ii)].

(f) Disque de rayon R [axe passant par le centre, dans le plan, Fig. 1(ii)].

(g) Sphère creuse de rayon R [axe passant par le centre].

(h) Sphère pleine de rayon R [axe passant par le centre].

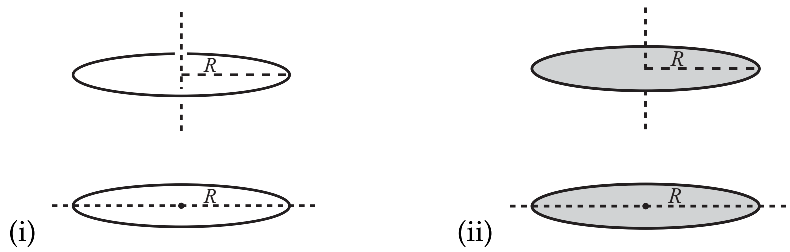

FIG. 1: © D. Morin

3 Théorème de Huygens-Steiner

On considère une tige de masse M, de longueur ℓ, et de densité linéique de masse λ uniforme.

(a) Déterminez le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et perpendiculaire à la tige.

(b) Par un calcul direct, déterminez le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par l'un des boûts de la tige et parallèle à l'axe considéré dans la question (a).

(c) Vérifiez sur cet exemple la validité du théorème de Huygens-Steiner (ou « théorème du déplacement »).

4 Un cylindre sur un plan incliné

Un cylindre de masse M, de rayon R et de hauteur h roule sans glisser sur un plan incliné, qui fait un angle α avec l'horizontal. Le cylindre a une densité volumique de masse ρ uniforme.

(a) Calculez le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de rotation.

(b) Déterminez la vitesse du cylindre après qu'il ait parcouru une distance d sur le plan incliné. On supposera que la vitesse initiale du cylindre est nulle.

(c) En déduire l'accélération du centre du cylindre.

5 Machine de Atwood

Considérons la machine de Atwood de la Fig. 2. Les masses ponctuelles sont m et $2m$, et la poulie est un disque uniforme de masse m, de rayon R, et de moment d'inertie $I = mR^2/2$ par rapport à son axe de rotation [cf. Exercice 2(d)]. On néglige le poids de la corde reliant les deux masses ponctuelles, et on suppose que la corde ne glisse pas sur la poulie. Déterminez la vitesse et l'accélération des deux masses suspendues.

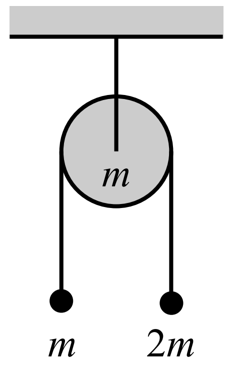

FIG. 2: © D. Morin

6 Quitter la sphère

Une boule de masse m, de rayon R_b, et de moment d'inertie $\beta m R_\mathrm{b}^2$ où β est une constante se situe au sommet d'une sphère fixe (rayon R). On donne une pichenette infinitésimale à la boule afin qu'elle commence à rouler sur la sphère. On cherche à déterminer l'endroit où la boule quitte la sphère.

(a) Résoudre ce problème en considérant tout d'abord que la boule est une masse ponctuelle, $R_\mathrm{b} \to 0$. On négligera le frottement entre la masse ponctuelle et la sphère.

(b) Considérez maintenant que la boule a un rayon fini, que l'on supposera beaucoup plus petit que le rayon de la sphère, $R_\mathrm{b} \ll R$. Discuter les cas limites $\beta \to 0$, $\beta = 2/5$ [cas d'une sphère uniforme, cf. Exercice 2(h)], et $\beta \to \infty$.

(c) Comment la réponse à la question précédente change-t-elle lorsque R_b devient comparable ou plus grand que R ?