

Examen — 2^e session

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

Durée de l'épreuve : 2h

Le sujet comprend 2 pages au total

1 Gaz de fermions de Dirac sans masse

On considère un gaz de fermions libres dont on néglige le degré de liberté de spin, confinés dans une boîte tri-dimensionnel de volume $V = L^3$ à la température T . La relation de dispersion correspond à celle de fermions de Dirac sans masse,

$$E_{\mathbf{k}} = \hbar v |\mathbf{k}|,$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ est quantifié selon $k_i = 2\pi n_i / L$ avec n_i un entier relatif ($i = x, y, z$), où \hbar est la constante de Planck réduite, et où v est une constante dont la dimension est celle d'une vitesse. On se place dans la suite du problème à la limite thermodynamique.

- 1/ Quelle est la signification physique de l'énergie de Fermi E_F ?
- 2/ Pour un nombre fixé de particule dans le système, est-ce que l'énergie de Fermi et le potentiel chimique μ coïncide (i) à $T = 0$, (ii) à $T \neq 0$? Commentez.
- 3/ Montrer que la densité d'état s'écrit $\rho(E) = \alpha E^n$, où n est un entier que l'on déterminera et où α est une constante que l'on explicitera en fonction des données du problème.
- 4/ Donner l'expression de la distribution de Fermi-Dirac $f(E)$ en fonction du potentiel chimique et de la température. Représenter $f(E)$ pour $T \neq 0$ et pour $T = 0$.
- 5/ Donner une relation intégrale entre le nombre de particule N et le potentiel chimique μ du système. (On ne cherchera pas à calculer l'intégrale !)
- 6/ À $T = 0$, en déduire l'expression de l'énergie de Fermi E_F en fonction de la densité de particule n . Donner l'expression du vecteur d'onde de Fermi k_F en fonction de n .
- 7/ Comment vos réponses aux questions 3/, 5/ et 6/ changent-elles si l'on confine le gaz de fermions à une surface d'aire $S = L^2$ (gaz de fermions de Dirac sans masse à 2D) ?

2 Modèle simple à deux particules

On considère un modèle très simple où deux particules se trouvent à la température T dans une boîte contenant deux compartiments. On note r_i la position de la i^{e} particule ($i = 1, 2$) qui prend la valeur -1 si la particule est dans le compartiment de gauche et la valeur $+1$ si elle est à droite. On note $-A_i$ l'énergie de la particule i si elle est dans le compartiment de gauche et $+A_i$ si elle est à droite. Finalement on considère que si les deux particules sont du même côté on gagne l'énergie $\kappa > 0$.

2.1 Position moyenne et fonction de corrélation

- 1/ Justifier que l'énergie du système s'écrit $\mathcal{H} = A_1 r_1 + A_2 r_2 - \kappa \delta_{r_1, r_2}$, où δ_{r_1, r_2} est le symbole de Kroenecker.
- 2/ Donner les différents états microscopiques du système et en déduire l'expression de la fonction de partition \mathcal{Z} du système.

- 3/ Calculer la valeur moyenne $\langle r_1 \rangle$ de la position de la particule 1. En déduire l'expression de $\langle r_2 \rangle$. Montrer que lorsque $A_1 = A_2$, on trouve

$$\langle r_1 \rangle = \langle r_2 \rangle = -\frac{e^{\beta\kappa} \sinh(2\beta A)}{1 + e^{\beta\kappa} \cosh(2\beta A)},$$

où $\beta = 1/k_B T$. Dans ce cas, tracer l'allure de la courbe $\langle r_2 \rangle$ en fonction de T et commenter physiquement votre résultat.

- 4/ *Question de cours* : Rappelez la définition de la fonction de corrélation des positions pour un fluide classique. Quelle est son allure dans le cas d'un gaz, d'un liquide et d'un solide ? Comment peut-on déterminer expérimentalement cette fonction ?
- 5/ On s'intéresse aux corrélations entre les deux particules. Pour cela on définit la fonction de corrélation $G^{(2)}(1,2) = \langle r_1 r_2 \rangle - \langle r_1 \rangle \langle r_2 \rangle$. Commenter cette définition et montrer que

$$G^{(2)}(1,2) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{Z}}{\partial A_1 \partial A_2}$$

- 6/ En déduire que pour $A_1 = A_2$ on a

$$G^{(2)}(1,2) = \frac{e^{2\beta\kappa} - 1}{[1 + e^{\beta\kappa} \cosh(2\beta A)]^2}.$$

2.2 Energie interne et capacité calorifique

- 1/ *Question de cours* : Rappelez la définition de la capacité calorifique \mathcal{C} d'un système. Comment se comporte-t-elle dans une transition de phase du premier ordre et du deuxième ordre ? Essayer de donner une image physique intuitive de ce résultat.
- 2/ Montrer que l'énergie interne du système se met sous la forme

$$U(T) = -\frac{(A_1 - A_2) \sinh[\beta(A_1 - A_2)] + e^{\beta\kappa} \{\kappa \cosh[\beta(A_1 + A_2)] + (A_1 + A_2) \sinh[\beta(A_1 + A_2)]\}}{\cosh[\beta(A_1 - A_2)] + e^{\beta\kappa} \cosh[\beta(A_1 + A_2)]}.$$

On cherche à étudier le comportement de la capacité calorifique \mathcal{C} du système en fonction de la température. L'expression précédente étant complexe on va commencer par s'intéresser à deux cas limites ($A_1 = A_2 = A, \kappa = 0$) et ($A_1 = A_2 = 0, \kappa \neq 0$).

- 3/ On se place d'abord dans le cas ($A_1 = A_2 = A, \kappa = 0$). Montrer que la capacité calorifique se met sous la forme

$$\mathcal{C}(T) = k_B \frac{(2\beta A)^2}{1 + \cosh(2\beta A)}.$$

À partir de l'étude rapide de la fonction $\frac{x^2}{1 + \cosh x}$ (on donnera les valeurs limites et on justifiera que cette fonction a un maximum), donner le comportement de la capacité calorifique en fonction de la température pour ($A_1 = A_2 = A, \kappa = 0$). Interpréter physiquement votre résultat.

- 4/ On se place maintenant dans le cas ($A_1 = A_2 = 0, \kappa \neq 0$). Montrer que la capacité calorifique se met sous la forme

$$\mathcal{C}(T) = k_B (\beta\kappa)^2 \frac{e^{\beta\kappa}}{(1 + e^{\beta\kappa})^2}.$$

À partir de l'étude rapide de la fonction $x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ (on donnera les valeurs limites et on montrera que cette fonction a un maximum), donner le comportement de la capacité calorifique en fonction de la température pour ($A_1 = A_2 = 0, \kappa \neq 0$). Interpréter physiquement votre résultat.

- 5/ Donner l'allure générale de la courbe $\mathcal{C}(T)$ pour (A_1, A_2, κ) quelconques et discuter physiquement cette allure, en particulier comparer cette courbe à l'allure de la fonction de corrélation $G^{(2)}(1,2)$.