TD 0
Analyse vectorielle — Rappels et compléments

Les exercices suivants ont pour but de vous rappeler et de mieux vous familiariser aux techniques de calcul vectoriel qui seront utilisées tout au long du cours. Les exercices ne seront pas discutés en cours, mais un corrigé sera mis à votre disposition en ligne. (`http://www.ipcms.unistra.fr/?page_id=12803`).

Il est *fortement* recommandé de lire (au fur et à mesure que vous ferez les exercices) le chapitre 1 du livre de D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Addison-Wesley, 1999). Celui-ci vous aidera grandement dans la résolution des exercices.

Exercice 0.1

(a) Montrez que le produit scalaire et le produit vectoriel sont distributifs.

(b) Le produit vectoriel est-il associatif ? $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]$

Exercice 0.2

Déterminez l'angle entre les diagonales d'un cube.

Exercice 0.3

(a) Démontrez la règle « BAC-CAB » :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

(b) En déduire que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Exercice 0.4

Déterminez le vecteur $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ séparant les points $\mathbf{r}' = (2, 8, 7)$ et $\mathbf{r} = (4, 6, 8)$. Déterminez la norme $\eta = |\boldsymbol{\eta}|$ et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}/\eta$.

Exercice 0.5

Calculez le gradient des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.

(c) $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \sin y \ln z$.

Exercice 0.6

L'altitude en un point (x, y) d'une colline est donnée (en mètres) par

$$h(x, y) = 10\left(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12\right),$$

où y est la distance (en kilomètres) par rapport au nord de Niederschaeffolsheim et x la distance par rapport au sud de ce même village.

(a) Où est situé le sommet de la colline ?

(b) Quelle est l'altitude de la colline ?

(c) Quelle est la raideur de la pente (en %) en un point 1 km au nord et 1 km à l'est de Niederschaeffolsheim ? Dans quelle direction la pente est-elle la plus raide, et à quel point ?

Exercice 0.7

Soit $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ le vecteur séparant le point $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ du point $\mathbf{r} = (x, y, z)$, soit η la norme de ce vecteur, et soit $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}/\eta$ le vecteur unitaire selon $\boldsymbol{\eta}$. Montrez que

(a) $\nabla(\eta^2) = 2\boldsymbol{\eta}$.

(b) $\nabla(1/\eta) = -\hat{\boldsymbol{\eta}}/\eta^2$.

(c) Quelle est l'expression générale de $\nabla(\eta^n)$?

[*Attention :* l'opérateur ∇ est défini par rapport à $\mathbf{r}$!]

Exercice 0.8

Calculez la divergence des fonctions vectorielles suivantes :

(a) $\mathbf{v}_a = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$.

(b) $\mathbf{v}_b = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3zx\,\hat{\mathbf{z}}$.

(c) $\mathbf{v}_c = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$.

Exercice 0.9

Faire un croquis de la fonction vectorielle $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}/r^2$, où $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, et calculez sa divergence. Le résultat vous surprendra peut-être... Pouvez-vous l'expliquer ? [*Indication :* Le calcul que vous avez effectué est-il valable pour tout r ?]

Exercice 0.10

Déterminez le rotationnel des fonctions vectorielles de l'Exercice 0.8.

Exercice 0.11

Inventez une fonction vectorielle qui a une divergence *et* un rotationnel nuls en tout point de l'espace. (Un vecteur *constant* ferait évidemment l'affaire, mais essayez de trouvez quelque chose d'un peu plus intéressant...)

Exercice 0.12

Démontrez les Eqs. (3), (6) et (7) du formulaire distribué en cours.

Exercice 0.13

(a) Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux fonctions vectorielles. Déterminez l'expression générale de $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ en fonction des composantes cartésiennes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

(b) Calculez $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}$, où $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ et $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$.

(c) Evaluez $(\mathbf{v}_a \cdot \nabla)\mathbf{v}_b$, où $\mathbf{v}_a$ et $\mathbf{v}_b$ sont définis à l'Exercice 0.8.

Exercice 0.14

Montrez que

$$\begin{aligned}
\nabla \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}, \\
\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) &= \frac{g(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla g)}{g^2}, \\
\nabla \times \left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) &= \frac{g(\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla g)}{g^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.15

Vérifiez les règles du produit (4), (6), et (8) du formulaire pour les vecteurs $\mathbf{A} = x\,\hat{\mathbf{x}} + 2y\,\hat{\mathbf{y}} + 3z\,\hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{B} = 3y\,\hat{\mathbf{x}} - 2x\,\hat{\mathbf{y}}$.

Exercice 0.16

Calculez le laplacien des fonctions suivantes :

(a) $T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4$.

(b) $T_b = \sin x \sin y \sin z$.

(c) $T_c = \mathrm{e}^{-5x} \sin(4y) \cos(3z)$.

(d) $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$.

Exercice 0.17

(a) Montrez que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Vérifiez-le pour la fonction $\mathbf{v}_a$ de l'Exercice 0.8.

(b) Montrez que le rotationnel d'un gradient est toujour nul. Vérifiez-le pour la fonction (b) de l'Exercice 0.5.

Exercice 0.18

Calculez l'intégrale curviligne de la fonction vectorielle $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + y^2\,\hat{\mathbf{z}}$ de l'origine des coordonnées au point $(1,1,1)$ par les trois chemins suivants :

(a) $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$.

(b) $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$.

(c) Le chemin rectiligne direct.

Quelle est l'intégrale rectiligne de $\mathbf{v}$ selon le chemin fermé qui emprunte d'abord le chemin (a), et ensuite le chemin (b) ?

Exercice 0.19

On considère le cube de la Fig. 1. Déterminez le flux $\phi = \oint d\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ du champ de vecteur $\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\,\hat{\mathbf{z}}$ au travers de la surface du cube. (On orientera la surface vers l'*extérieur* du cube.)

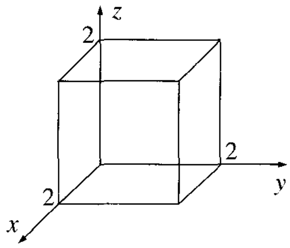

FIG. 1: © D. J. Griffiths

Exercice 0.20

Calculez l'intégrale de volume de la fonction $f(z) = z^2$ sur le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, et $(0,0,1)$.

Exercice 0.21

Vérifiez le théorème fondamental du gradient (cf. formulaire) avec la fonction $f(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2yz^3$, les points $\mathbf{a} = (0,0,0)$ et $\mathbf{b} = (1,1,1)$, et les trois chemins de la Fig. 2 :

(a) $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$.

(b) $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$.

(c) Le chemin parabolique $z = x^2$, $y = x$.

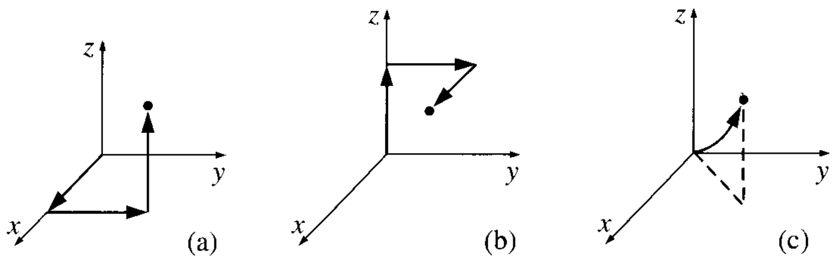

FIG. 2: © D. J. Griffiths

Exercice 0.22

(a) Vérifiez le théorème fondamental de la divergence (théorème de Green–Ostrogradski) à l'aide de la fonction $\mathbf{v} = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3zx\,\hat{\mathbf{z}}$. Vous prendrez comme volume le cube de la Fig. 1.

(b) Vérifiez le théorème fondamental du rotationnel (théorème de Stokes) à l'aide de la même fonction $\mathbf{v}$ qu'à la question (a). Vous prendrez pour cela l'aire triangulaire grisée de la Fig. 3

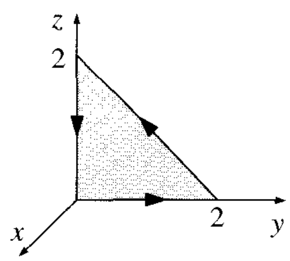

FIG. 3: © D. J. Griffiths

Exercice 0.23

Démontrez les deux égalités suivantes :

$$\int_{\mathcal{S}} f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{P}} f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \tag{1}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{2}$$

Dans l'Eq. (1), $\mathcal{S}$ désigne une surface orientée quelconque et $\mathcal{P}$ son périmètre, alors que dans l'Eq. (2), $\mathcal{V}$ désigne un volume quelconque et $\mathcal{S}$ sa surface fermée.

Exercice 0.24

(a) En coordonnées sphériques, déterminez r, θ et φ en fonction de x, y, et z.

(b) Exprimez les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ en fonction de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$. Vérifiez que les vecteurs $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ définissent bien une base orthonormée directe.

(c) Déterminez les formules inverses, c'est-à-dire exprimez $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ en fonction de $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

Exercice 0.25

(a) Vérifiez le théorème de la divergence pour la fonction $\mathbf{v}_1 = r^2\,\hat{\mathbf{r}}$, en utilisant comme volume une sphère de rayon R centrée à l'origine.

(b) Faire de même pour la fonction $\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{r}}/r^2$. Si votre réponse vous surprend, jetez à nouveau un oeil à l'Exercice 0.9...

Exercice 0.26

(a) Calculez la divergence de la fonction suivante exprimée en coordonnées sphériques : $\mathbf{v} = r\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

(b) Vérifiez le théorème de Green–Ostrogradski pour cette fonction, en utilisant pour volume l'hémisphère de la Fig. 4.

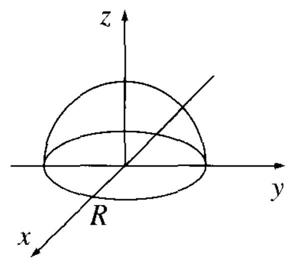

FIG. 4: © D. J. Griffiths

Exercice 0.27

(a) Déterminez le gradient et le laplacien de la fonction $f(r, \theta, \varphi) = r(\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi)$ en coordonnées sphériques.

(b) Vérifiez votre expression du laplacien en utilisant les coordonnées cartésiennes.

(c) Vérifiez le théorème fondamental du gradient pour la fonction f en utilisant le chemin de la Fig. 5 allant de l'origine au point $(0, 0, 2)$.

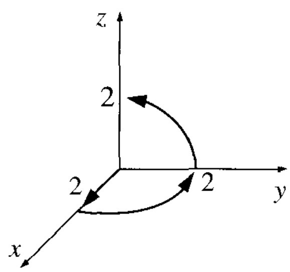

FIG. 5: © D. J. Griffiths

Exercice 0.28

(a) En coordonnées cylindriques, exprimez les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ en fonction de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$. Vérifiez que les vecteurs $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$ définissent bien une base orthonormée directe.

(b) Déterminez les formules inverses, c'est-à-dire exprimez $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ en fonction de $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$.

Exercice 0.29

(a) Calculez la divergence de la fonction $\mathbf{v} = r(2 + \sin^2\theta)\,\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + 3z\,\hat{\mathbf{z}}$ en coordonnées cylindriques.

(b) Vérifiez le théorème de la divergence pour cette fonction, en utilisant le quart de cylindre de la Fig. 6.

(c) Calculez le rotationnel de $\mathbf{v}$.

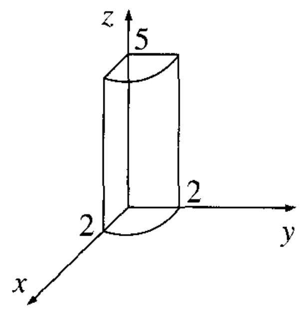

FIG. 6: © D. J. Griffiths