

## TD 5 Modèle de Blume-Emery-Griffiths

L'hélium-4 ( $^4\text{He}$ ) pur passe d'une phase fluide à une phase superfluide à basse température (transition  $\lambda$ ). Lorsque l'on ajoute des atomes d'hélium-3, la transition est modifiée. On cherche à décrire un tel mélange  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Pour cela on utilise un modèle sur réseau proposé par Blume, Emery et Griffiths en 1971 [1]. Chacun des  $N$  sites du réseau est occupé par un atome (soit d'hélium-4, soit d'hélium-3) et possède  $z$  proches voisins. On associe à chaque site un spin  $S_i$ . Lorsque le site est occupé par un atome de  $^3\text{He}$ , on attribue la valeur 0 au spin  $S_i$ , et la valeur  $\pm 1$  si c'est un atome de  $^4\text{He}$ . Le degré de liberté de spin décrit la nature du système. Si  $m = \langle S_i \rangle$  est nul, le fluide est normal et si  $m \neq 0$  il est superfluide.

### 1 Préliminaire

Quelle est la relation entre  $\langle S_i^2 \rangle$  et la fraction moyenne  $x$  de  $^3\text{He}$  par site ?

### 2 Hamiltonien du modèle

On introduit tout d'abord un hamiltonien d'Ising avec champ extérieur  $H$  et un couplage entre proches voisins  $-J$  qui décrit la tendance du système à être superfluide à basse température,

$$\mathcal{H}_1 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i,$$

où  $\langle i, j \rangle$  représente une somme sur les proches voisins du réseau.

- Justifiez brièvement l'emploi de cet hamiltonien pour décrire le mélange  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Quel est le signe de  $J$  ?
- On veut ensuite décrire les interactions entre les proches voisins. Pour cela, on note  $-u_{33}$ ,  $-u_{44}$  et  $-u_{34} = -u_{43}$  l'énergie d'interaction de chaque type de paire ( $^3\text{He}$ - $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ - $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  et  $^4\text{He}$ - $^3\text{He}$ , respectivement). Exprimez le hamiltonien d'interaction  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ .
- Finalement, on prend en compte les potentiels chimiques  $\mu_3$  et  $\mu_4$  des deux espèces ( $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$ ). Le hamiltonien total s'écrit donc  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_{\text{int}} - \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4$ , où  $N_3$  et  $N_4$  sont les nombres d'atomes de  $^3\text{He}$  et  $^4\text{He}$ . Montrez que ce Hamiltonien se met sous la forme

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^2 S_j^2 - H \sum_{i=1}^N S_i - \Delta \sum_{i=1}^N S_i^2 + C.$$

On exprimera les constantes  $K$ ,  $\Delta$  et  $C$  en fonction des paramètres du problème. Dans la suite on pose  $C = 0$ . Justifiez brièvement ce choix.

### 3 Approximation de champ moyen

- Définir la fonction de corrélation de spins  $C_{ij}$ . Que vaut-elle dans l'approximation de champ moyen ?
- Montrez que dans cette approximation on peut remplacer le produit  $S_i S_j$  par  $S_i m + m S_j - m^2$ . Par quoi peut-on remplacer  $S_i^2 S_j^2$  ?

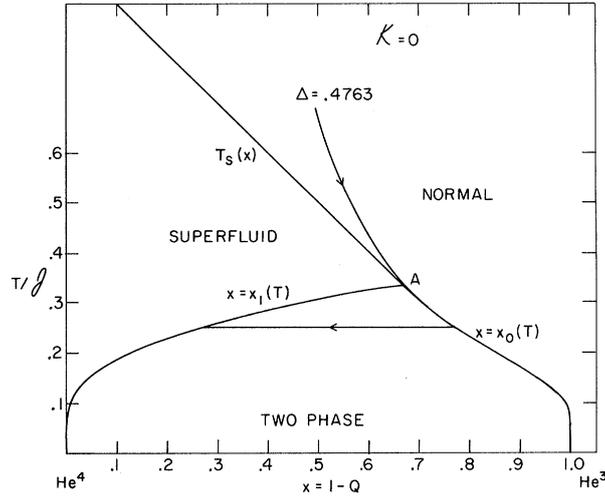


FIG. 1 – Diagramme de phase calculé à partir des Eqs. (1) pour  $H = 0$  et  $K = 0$ . Le point tricritique A sépare les régions de transition de phase du premier et du second ordre. Reproduit de la Ref. [1].

- (c) En déduire l'expression de la grande fonction de partition  $\Xi$  puis du grand potentiel  $\Omega$ .  
(d) Écrire les relations d'auto-cohérences qui donnent  $m$  et  $x$ . Montrez qu'elles se mettent sous la forme

$$m = (1 - x) \tanh(\beta[H + zJm]), \quad (1a)$$

$$x = \frac{1}{1 + 2 \cosh(\beta[H + zJm]) \exp(\beta[\Delta + zK(1 - x)])}, \quad (1b)$$

où  $\beta = 1/k_B T$ . La résolution numérique de ces équations donnent, à champ nul ( $H = 0$ ) et pour  $K = 0$  (ce qui correspond approximativement à la situation expérimentale), le diagramme de phase de la Fig. 1.

## 4 Description de la transition de phase

On se place désormais dans le cas où  $K = 0$ . On cherche à mieux comprendre le diagramme de phase du système représenté sur la Fig. 1. On se place donc à champ nul et près de la transition, c'est-à-dire à  $m$  voisin de 0

- (a) On introduit le potentiel

$$G(T, m, \Delta) = \Omega(T, \Delta, H) + Hm.$$

Justifiez l'utilisation de ce potentiel pour étudier la transition de phase à champ nul.

- (b) On cherche à développer ce potentiel sous la forme

$$G(T, m, \Delta) = G(T, 0, \Delta) + \frac{1}{2}a(T, \Delta)m^2 + \frac{1}{4}b(T, \Delta)m^4 + \frac{1}{6}c(T, \Delta)m^6 + \mathcal{O}(m^8).$$

En vous limitant au deuxième ordre en  $m$ , montrez que

$$a(T, \Delta) = \delta k_B T - zJ,$$

où l'on a posé  $\delta = 1 + e^{-\beta\Delta}/2$ . Dans la suite, on admettra que

$$b(T, \Delta) = \frac{k_B T}{8} \left( \delta^2 - \frac{\delta^3}{3} \right),$$

$$c(T, \Delta) = \frac{k_B T}{6} \left( \frac{\delta^3}{2} - \frac{3\delta^4}{8} + \frac{3\delta^5}{40} \right).$$

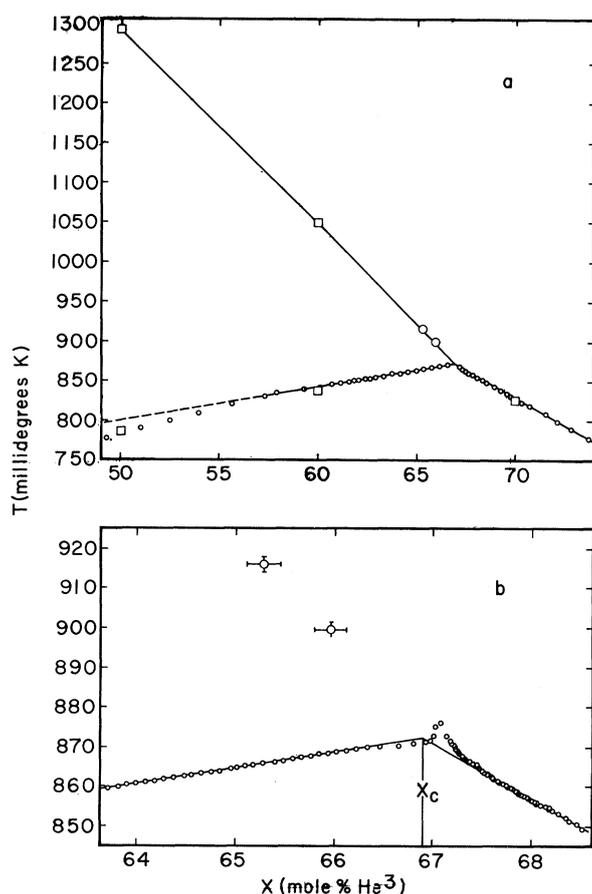


FIG. 2 – Diagramme de phase obtenu expérimentalement. Reproduit de la Ref. [2].

- (c) Donnez qualitativement l'allure de  $G(T, m, \Delta)$  lorsque  $b(T, \Delta) > 0$ . En déduire qu'il existe une transition de phase pour une température  $T_c(x) = T_c(0)(1 - x)$ .
- (d) On suppose que  $c(T, \Delta) > 0$ . Donnez qualitativement l'allure de  $G(T, m, \Delta)$  lorsque  $b(T, \Delta) < 0$ . Que se passe-t-il dans ce cas là ? Montrez que l'équation de la *ligne de transition du premier ordre* s'écrit  $a = 3b^2/16c$ .
- (e) Montrez qu'il existe un point tricritique  $(T_t, x_t)$  dont on calculera les coordonnées.
- (f) Confrontez vos prédictions théoriques aux résultats expérimentaux de la Fig. 2.

## Références

- [1] M. Blume, V. J. Emery, R. B. Griffiths, *Ising model for the  $\lambda$  transition and phase separation in  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures*, Phys. Rev. A **4**, 1071 (1971).
- [2] E. H. Graf, D. M. Lee, J. D. Reppy, *Phase separation and the superfluid transition in liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures*, Phys. Rev. Lett. **19**, 417 (1967).