TD
Élasticité de la laine

On peut modéliser la laine par une longue chaîne de N ($\gg 1$) molécules identiques. Une telle chaîne est appelée macromolécule ou polymère. Chaque molécule (ou monomère) peut se trouver dans deux états notés α et β. Dans l'état α, la molécule contribue pour a à la longueur de la chaîne et son énergie est E_α. Dans l'état β, sa longueur est b et son énergie E_β. La chaîne est soumise à une tension X. On remarquera qu'il existe une analogie entre la tension X du fil et la pression P d'un gaz classique. On va utiliser cette analogie pour étudier le système dans l'ensemble microcanonique (énergie et longueur imposées), canonique (température et longueur imposées), et canonique généralisé X-T (température et tension imposées).

1 Ensemble microcanonique

(a) Écrire le premier principe de la thermodynamique pour la chaîne de monomères.

(b) Donnez les expressions de la longueur L de la chaîne et de son énergie E en fonction du nombre N_α de molécules dans l'état α.

(c) Quel est le nombre d'états ayant pour énergie $E(N_\alpha)$ et pour longueur $L(N_\alpha)$? En déduire l'entropie S du système.

(d) Explicitez le premier principe de la thermodynamique et en déduire N_α en fonction des paramètres du problème. En déduire l'équation d'état de la chaîne.

2 Ensemble canonique

On suppose maintenant que la chaîne est en contact avec un thermostat à la température T.

(a) Calculez la fonction de partition canonique du système.

(b) Retrouvez l'équation d'état de la chaîne.

3 Ensemble canonique généralisé X-T

On suppose toujours que la chaîne est en contact avec un thermostat à la température T. De plus, sa tension est imposée par l'expérimentateur qui se comporte donc comme un réservoir de tension.

(a) Calculez la fonction de partition généralisée X-T du système.

(b) En déduire l'équation d'état de la chaîne.

4 Étude de l'élasticité

Pour simplifier, on supposera dans la suite que $\Delta \equiv E_\alpha - E_\beta = 0$.

(a) Déterminez la longueur moyenne $\overline{L}$ de la chaîne à l'équilibre en fonction de X et T.

(b) Donnez l'allure de la courbe $\overline{L} = f(X/T)$. On étudiera plus particulièrement le domaine $aX \ll k_\mathrm{B}T$ et on montrera que, dans ce domaine, la chaîne vérifie la loi de Hooke

$$X = \chi(T)(\overline{L} - L_0).$$

Donnez les expressions de L_0 et $\chi(T)$.