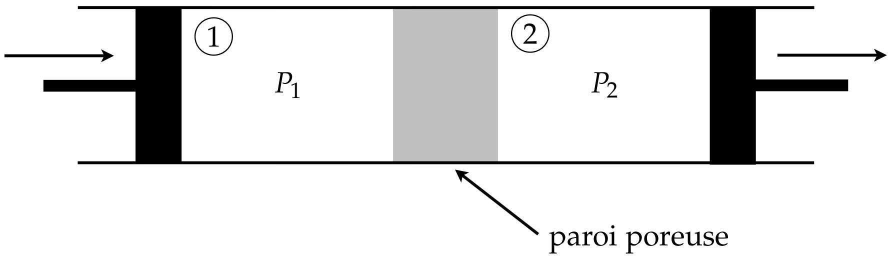
# TD
# Développement du viriel

## 1 Détente de Joule-Thomson et second coefficient du viriel

### 1.1 Détente de Joule-Thomson

Dans une détente de Joule-Thomson, on fait passer un gaz à travers une paroi poreuse, d'une région ① où la pression $P_1$ est élevée à une région ② où la pression $P_2$ est plus faible. Au fur et à mesure de la détente, les volumes des deux régions s'ajustent (par exemple à l'aide de pistons) afin de conserver les pressions $P_1$ et $P_2$ constantes. Cette détente a lieu de façon adiabatique. On appelle $V_1$ le volume initial de la région ① et $V_2$ le volume final de la région ②.




(a) En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrez que l'enthalpie du gaz $H = E + PV$ est conservée lors de la détente.

(b) On introduit la capacité calorifique à pression constante $C_P$ et le coefficient thermodynamique $h$ par $\delta Q = C_P \mathrm{d}T + h\mathrm{d}P$. Montrez que $h$ s'exprime comme

$$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P .$$

(c) Proposez une définition pour le coefficient de Joule-Thomson $\eta$ qui caractérise la variation de température lors de la détente. Montrez que $\eta$ se met sous la forme

$$\eta = \frac{1}{C_P}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right].$$

Quelle est l'expression de $\eta$ pour un gaz parfait ?

### 1.2 Etude d'un gaz réel

On considère maintenant un gaz réel.

(a) Écrire son équation d'état en ne retenant que les deux premiers termes du développement du viriel.

(b) On suppose que l'interaction $u(r)$ entre deux molécules distantes de $r$ est infiniment répulsive pour $r < a$, vaut $-u_0$ (avec $u_0 > 0$) pour $a < r < 2a$ et est nulle pour $r > 2a$. Calculez le deuxième coefficient du viriel

$$B_2(T) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\left[1 - \mathrm{e}^{-\beta u(r)}\right],$$

où $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$. Donnez l'allure de la courbe $B_2(T)$.

(c) Exprimer $\eta$ en fonction de $B_2(T)$.

(d) Que représente la température d'inversion définie par $\eta(T_{\text{inv}}) = 0$ ? En supposant que $\beta u_0 \ll 1$, donnez une expression approchée de $T_{\text{inv}}$.

# 2 Fluide classique de bâtonnets durs

On considère le modèle de Tonks, c'est-à-dire un modèle de fluide classique à une dimension, composé de $N$ batônnets de longueur $\ell$ confinés dans un espace de taille $L$. On appelle $\rho$ la densité de batônnets. On rappelle que la fonction de partition canonique $Z$ du système est donnée par

$$Z = \frac{1}{N!\Lambda^N(T)} \int_0^L \mathrm{d}x_1 \ldots \int_0^L \mathrm{d}x_N \, \mathrm{e}^{-\beta U(x_1,\ldots,x_N)}, \tag{1}$$

où $\Lambda(T)$ est la longueur d'onde thermique de de Broglie et $U(x_1,\ldots,x_N)$ est l'énergie potentielle du système. On notera $g(x)$ la fonction de corrélation de paires, définie par

$\rho g(x) =$ densité moyenne de batônnets en $x$, sachant qu'il y a un batônnet à l'origine.

## 2.1 Description qualitative du système

(a) Par analogie avec les systèmes de fluides à trois dimensions, définir une pression unidimensionnelle.

(b) Quelle est la signification physique de la densité $\rho_{\text{CP}} = 1/\ell$ ? Représentez la fonction de corrélation de paires pour $\rho \to \rho_{\text{CP}}$, puis pour $\rho \to 0$.

(c) Tracez l'allure du potentiel d'interaction entre deux batônnets en fonction de $x$ ? Décrire qualitativement comment varie l'allure de la fonction $g(x)$ lorsque la température varie. Calculez le deuxième coefficient du viriel $B_2(T)$.

(d) Pour $\rho \to \rho_{\text{CP}}$, quelle est la valeur de l'intégrale $\int_0^{3\ell/2} \mathrm{d}x \, g(x)$ ?

(e) Déterminez la vitesse moyenne et l'énergie cinétique moyenne d'un batônnet.[1] Quelle est l'énergie interne moyenne du système ?

(f) Donnez une expression approchée de l'équation d'état du système au second ordre en $\rho$.

## 2.2 Description quantitative

On va maintenant essayer de calculer de façon exacte l'équation d'état du système.

(a) D'où provient le facteur $1/N!$ dans l'expression (1) de la fonction de partition ?

(b) Calculez la fonction de partition du système.

(c) En déduire l'équation d'état exacte du système. Vérifiez que l'on retrouve bien la bonne expression pour le second coefficient du viriel.

[1] On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, x^2 \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$