TD 1
Électrostatique — Rappels et compléments

Exercice 1.1

(a) Douze charges électriques identiques de charge q sont situées aux coins d'un dodécagone (polygone régulier à douze côtés). Quelle est la force totale exercée sur une charge test Q se trouvant au centre du dodécagone ?

(b) On enlève l'une des douze charge. Quelle est la force exercée sur la charge test ?

(c) Répétez les questions (a) et (b) pour un tridécagone (polygone régulier à treize côtés).

Exercice 1.2

(a) Soient deux charges q situées sur l'axe y, de part et d'autre de l'origine à une distance égale $d/2$. Déterminez le champ électrique le long de l'axe z.

(b) On remplace la charge de droite par $-q$. Reprenez la question (a) pour cette configuration.

Exercice 1.3

On considère un segment de longueur L et de densité de charge linéique uniforme λ. Déterminez le champ électrique à une distance z au dessus de l'une des deux extrémités du segment. Le résultat obtenu est-il en accord avec ce à quoi on s'attend lorsque $z \gg L$?

Exercice 1.4

Calculez le champ électrique à une distance z au dessus du centre d'une boucle carrée de côté a se trouvant dans le plan xy, de densité de charge linéique uniforme λ. [*Indication :* utilisez l'Exemple 1.1 du cours.]

Exercice 1.5

Calculez le champ électrique à une distance z au dessus du centre d'une boucle circulaire de rayon R se trouvant dans le plan xy et de densité de charge linéique uniforme λ.

Exercice 1.6

Calculez le champ électrique à une distance z au dessus du centre d'un disque de rayon R se trouvant dans le plan xy et de densité de charge surfacique uniforme σ. Que pouvez-vous dire des cas limites $R \to \infty$ et $z \gg R$?

Exercice 1.7

Supposons qu'en coordonnées sphériques, un champ électrique soit donné par $\mathbf{E} = kr^3\hat{\mathbf{r}}$, avec k une constante.

(a) Déterminez la densité de charge ρ.

(b) Trouvez la charge totale contenue dans une sphère de rayon R centrée à l'origine. Effectuez le calcul de deux façons différentes.

Exercice 1.8

Une charge q est située à un coin d'un cube. Quel est le flux de $\mathbf{E}$ au travers de la surface du cube se situant à l'opposé de la charge ?

Exercice 1.9

Utilisez le théorème de Gauss afin de trouver le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère creuse de rayon R et de densité de charge surfacique uniforme σ.

Exercice 1.10

Même question que l'Exercice 1.9, cette fois ci pour une sphère pleine de rayon R et de densité de charge volumique uniforme ρ.

Exercice 1.11

Déterminez le champ électrique à une distance r perpendiculaire à un fil infiniment long et de densité de charge linéique uniforme λ. Comparez votre résultat à l'Exemple 1.1 donné dans le cours.

Exercice 1.12

Déterminez le champ électrique à l'intérieur d'une sphère de densité de charge *non*-uniforme $\rho(r) = kr$, avec k une constante et r la distance à l'origine de la sphère.

Exercice 1.13

Une couche sphérique de rayon interne a et de rayon externe b porte une densité de charge $\rho(r) = k/r^2$ pour $a \leqslant r \leqslant b$ (k est une constante). Calculez le champ électrique dans les trois régions suivantes : (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$. Tracez $|\mathbf{E}|$ en fonction de r.

Exercice 1.14

Un long câble coaxial présente une densité de charge *volumique* uniforme ρ en son cylindre intérieur (rayon a), et une densité de charge *surfacique* uniforme σ sur sa couche cylindrique externe (rayon b). La charge surfacique est négative et telle que le câble tout entier soit électriquement neutre. Déterminez le champ électrique dans les trois régions suivantes : (i) $r < a$, (ii) $a < r < b$, (iii) $r > b$. Tracez $|\mathbf{E}|$ en fonction de r.

Exercice 1.15

Une plaque infinie d'épaisseur $2d$ a une densité de charge volumique uniforme ρ. Déterminez le champ électrique dans la direction perpendiculaire à la plaque (disons, selon la direction y, où $y = 0$ se situe au milieu de la plaque). Tracez E en fonction de y.

Exercice 1.16

Deux sphères de rayon R, l'une de densité de charge volumique uniforme $+\rho$, l'autre de densité $-\rho$, sont placées de telle sorte qu'elles se recouvrent partiellement. On appelle $\mathbf{d}$ le vecteur reliant les centres des deux sphères. Déterminez le champ électrique dans la région où les deux sphères se recouvrent. [*Indication :* utilisez votre réponse à l'Exercice 1.10.]

Exercice 1.17

Calculez le rotationnel de $\mathbf{E}$ directement à partir de l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\eta^2} \hat{\boldsymbol{\eta}},$$

où $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Exercice 1.18

L'un des deux champs vectoriels suivants ne peut pas être un champ électrostatique. Lequel ?

(a) $\mathbf{E} = k(xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}})$;

(b) $\mathbf{E} = k[y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}]$.

Ici, k est une constante. Pour celui des deux qui est possible, trouvez le potentiel électrostatique correspondant, en prenant l'origine comme référence de potentiel. Vérifiez votre réponse en calculant ∇V.

Exercice 1.19

Déterminez le potentiel dans tout l'espace pour la configuration de l'Exercice 1.10. On prendra l'infini comme origine du potentiel. Calculez le gradient de V et vérifiez que votre réponse donne bien le champ électrique. Tracez $V(r)$.

Exercice 1.20

Déterminez le potentiel dans tous l'espace pour la configuration de l'Exercice 1.11. Calculez le gradient de V et vérifiez que votre réponse donne bien le champ électrique.

Exercice 1.21

Pour la configuration de l'Exercice 1.13, déterminez le potentiel au centre de la couche, en prenant l'infini comme origine du potentiel.

Exercice 1.22

Pour la configuration de l'Exercice 1.14, déterminez la différence de potentiel entre un point sur l'axe du câble et un point sur le cylindre externe.

Exercice 1.23

Par un calcul *direct* (sans passer par l'expression du champ $\mathbf{E}$), déterminez le potentiel pour les configurations suivantes :

(a) Exercice 1.2(a) ;

(b) Exemple 1.1 du cours ;

(c) Exercice 1.6.

Dans chacun de ces cas, calculez $\mathbf{E} = -\nabla V$, et comparez aux résultats obtenus précédemment.

Exercice 1.24

Une surface conique (un cornet de glace vide) porte une densité de charge surfacique uniforme σ. La hauteur h du cône est égale au rayon de celui-ci à son sommet. Trouvez la différence de potentiel entre la pointe du cône et le point situé au centre du sommet.

Exercice 1.25

Vérifiez à l'aide de l'expression

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

que le potentiel vérifie bien l'équation de Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$.

Exercice 1.26

(a) Vérifiez que les résultats des Exemples 1.4 et 1.5 du cours et de l'Exercice 1.9 sont en accord avec les relations de passage du champ électrique.

(b) Utilisez le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique produit par un long cylindre creux de densité de charge surfacique uniforme σ. Là encore, vérifiez les relations de passage.

(c) Vérifiez que les résultats de l'Exemple 1.7 du cours sont en accord avec les relations de passage du potentiel électrostatique.

Exercice 1.27

(a) Trois charges sont situées aux sommets d'un carré de côté a : une charge $+q$ à l'origine, et deux charges $-q$ à $a\hat{\mathbf{x}}$ et $a\hat{\mathbf{y}}$, respectivement. Quel est le travail à fournir pour amener une quatrième charge $+q$ au quatrième sommet du carré ?

(b) Quel est le travail à fournir pour assembler toute la configuration de la question précédente ?

Exercice 1.28

On cherche à déterminer de trois façons différentes l'énergie électrostatique W d'une sphère de rayon R uniformément chargé en volume, de charge total q. [Cf. Exercices 1.10 et 1.19.]

(a) Utilisez l'expression $W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \, \rho V$.

(b) Utilisez l'expression $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\tau \, E^2$.

(c) Utilisez l'expression $W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau \, E^2 + \oint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathbf{a} \cdot V\mathbf{E} \right)$. Prenez un volume $\mathcal{V}$ sphérique de rayon a. Que se passe-t-il lorsque $a \to \infty$?

Exercice 1.29

Considérons deux couches sphériques concentriques infiniment minces de rayons a et b ($a < b$), et supposons que la couche interne (externe) porte une charge q ($-q$) uniformément répartie sur sa surface. Calculez l'énergie de cette configuration (i) à partir de $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\tau \, E^2$ et (ii) en utilisant le champ électrique produit par chacune des couches séparément.

Exercice 1.30

Une sphère métallique de rayon R porte une charge q et est entourée par une couche métallique concentrique de rayon interne a et rayon externe b ($R < a < b$). La couche ne porte pas de charge nette.

(a) Déterminez la densité surfacique de charge en R, a, et b.

(b) Calculez le potentiel au centre, en prenant l'infini comme origine du potentiel.

(c) La couche externe est maintenant relié à la masse, ce qui abaisse son potentiel à zéro. Comment vos réponses aux questions (a) et (b) changent-elles ?

Exercice 1.31

Deux cavités sphériques, de rayons a et b, sont creusées à l'intérieur d'une sphère conductrice (neutre) de rayon R. Une charge se situe au centre de chacune des cavités. Appelons les q_a et q_b.

(a) Déterminez les densités de charge surfaciques σ_a, σ_b, et σ_R.

(b) Quel est le champ électrique à l'extérieur du conducteur ?

(c) Quel est le champ électrique à l'intérieur de chaque cavité ?

(d) Quelle est la force exercée sur q_a et q_b ?

(e) Lesquelles de ces quatre réponses changent si une troisième charge q_c est approchée du conducteur ?

Exercice 1.32

Déterminez la capacité électrique par unité de longueur de deux cylindres métalliques coaxiaux, de rayons a et b ($a < b$).

Exercice 1.33

Une sphère de rayon R, centrée à l'origine, porte une densité de charge $\rho(r, \theta) = k\frac{R}{r^2}(R - 2r)\sin\theta$, avec k une constante, et r et θ les coordonnées sphériques usuelles. Trouvez une expression approchée du potentiel sur l'axe z, pour $z \gg R$.

Exercice 1.34

Considérons quatre charges ponctuelles situées de la façon suivante : une charge q à $-a\hat{\mathbf{z}}$, une charge $3q$ à $a\hat{\mathbf{z}}$, deux charges $-2q$ à $\pm a\hat{\mathbf{y}}$, avec a une certaine distance. Trouvez une expression approchée du potentiel électrostatique, valide à des points de l'espace loin de l'origine. (Exprimez votre réponse en coordonnées sphériques.)

Exercice 1.35

On considère une couche sphérique infiniment mince, de rayon R et de densité de charge surfacique $\sigma(\theta) = k\cos\theta$, avec k une constante. Calculez le moment dipolaire d'une telle distribution de charge et en déduire l'expression du potentiel à des distances lointaines du centre de la couche. [De façon remarquable, le résultat obtenu correspond au résultat *exact* !]

Exercice 1.36

Deux charges ponctuelles, $3q$ et $-q$, sont séparées d'une distance a. On considère les trois configurations suivantes : (a) $-q$ à l'origine et $3q$ à $a\hat{\mathbf{z}}$; (b) $-q$ à $-a\hat{\mathbf{z}}$ et $3q$ à l'origine ; (c) $-q$ à l'origine et $3q$ à $a\hat{\mathbf{y}}$. Pour chacune de ces configurations, déterminez (i) le monopôle électrique, (ii) le moment dipolaire, et (iii) le potentiel approximatif à des distances $r \gg a$ (en coordonnées sphériques), incluant les termes mono- et dipolaires.

Exercice 1.37

Un dipôle idéal $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ est situé à l'origine.

(a) Quelle à la force exercée par le dipôle sur une charge q située à $a\hat{\mathbf{x}}$?

(b) Quelle à la force exercée par le dipôle sur une charge q située à $a\hat{\mathbf{z}}$?

(c) Quel est le travail requis pour déplacer la charge q de $a\hat{\mathbf{x}}$ à $a\hat{\mathbf{z}}$?

Exercice 1.38

On considère trois charges ponctuelles réparties de la façon suivante : une charge q à $a\hat{\mathbf{z}}$, et deux charges $-q$ à $\pm a\hat{\mathbf{y}}$. Déterminez le champ électrique à des distances lointaines de l'origine, en incluant les deux termes les plus bas du développement multipolaires.

Exercice 1.39

Dans le cours, nous avons montré que le champ créé par un dipôle idéal orienté selon $\hat{\mathbf{z}}$ a pour expression

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}). \tag{1}$$

Montrez que l'Eq. (1) peut être réécrite sans faire usage d'un système de coordonnées de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]. \tag{2}$$