Contrôle continu n° 1

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.
Durée de l'épreuve : 1h
Le sujet comprend deux pages au total.

Questions de cours (4 points)

(1) Énoncez le théorème de Gauss sous sa forme locale ainsi que sous sa forme intégrale. Précisez la signification de chaque terme.

(2) Pour un matériau diélectrique de polarisation **P**, donnez les expressions des densités surfacique et volumique de charges liées. Précisez la signification de chaque terme.

(3) Donnez le lien entre le champ magnétique **B** et le potentiel vecteur **A**.

(4) Pour un matériau magnétique d'aimantation **M**, donnez les expressions des densités volumique et surfacique de courants liés.

Exercice 1 (8 points)

On considère une sphère de rayon R, et de densité volumique de charge $\rho(r) = kr^2$, avec k une constante et r la coordonnée radiale en sphérique. On appelera q la charge totale portée par la sphère.

(1) Donnes les unités (en SI) de la constante k.

(2) Déterminer k en fonction de q et R.

(3) Argumentez *brièvement*, en considérant la symétrie du système, que le champ électrostatique a la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$.

(4) Montrez que

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r^3}{R^5}, & r < R, \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

(5) Calculez le potentiel électrostatique au centre de la sphère, en prenant l'infini comme zéro de potentiel.

Exercice 2 (8 points)

On considère deux sphères concentriques de rayons a et b, avec $a < b$. La couche formée pour $a < r < b$ est composée d'un matériau diélectrique linéaire, de susceptibilité électrique χ_{e}. On place au centre commun aux deux sphères une charge (libre) q.

(1) En utilisant la symétrie du système et le théorème de Gauss, déterminez le vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ dans tout l'espace.

(2) En déduire le champ électrique dans tout l'espace.

(3) Déduire de la question (2) que la polarisation du matériau a pour expression

$$\mathbf{P} = \frac{q\chi_{\mathrm{e}}}{4\pi(1+\chi_{\mathrm{e}})}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{1}$$

(4) À partir de l'équation (1), déterminez les densités volumique et surfacique de charges liées. On rappelle qu'en coordonnées sphériques,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} = v_r\,\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

(5) Vérifiez que la charge *totale* du système est bien q.

Bon courage !