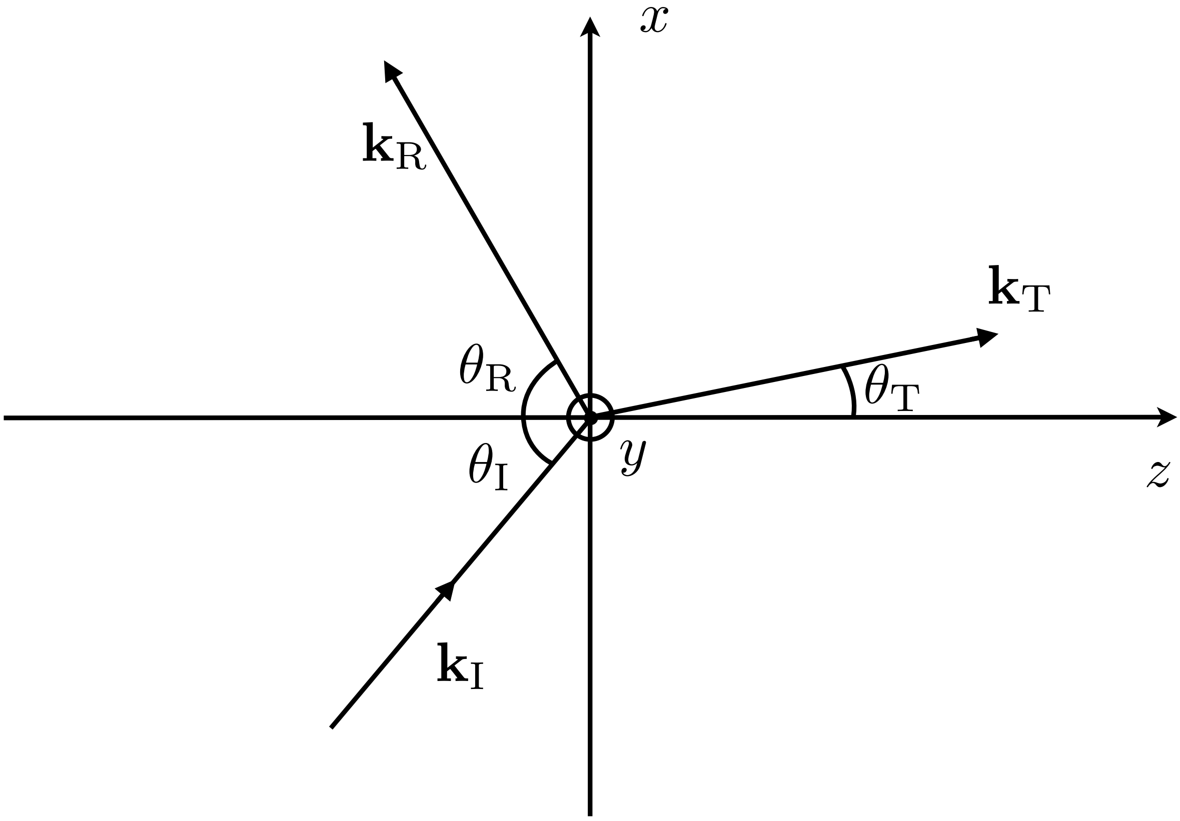
Examen du 12/05/2014

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1h30
Le sujet comprend 2 pages au total

NOM : **Prénom :**

On considère deux milieux diélectriques linéaires et homogènes d'indice de réfraction n_1 et n_2. On appelle respectivement ϵ_1 et ϵ_2 les permittivités des milieux 1 et 2. On suppose que les deux milieux ont une perméabilité μ_0 égale à celle du vide. Le milieu d'indice n_1 occupe tout le demi-espace $z < 0$ et le milieu d'indice n_2 le demi-espace $z > 0$ (voir figure ci-dessous).



Soit une onde plane monochromatique incidente sur la surface $z = 0$, de fréquence ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{I}$, et dont le champ électrique et magnétique s'écrivent, en notation complexe,

$$\mathbf{E}_\mathrm{I}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0,\mathrm{I}} \exp\left(\mathrm{i}[\mathbf{k}_\mathrm{I} \cdot \mathbf{r} - \omega t]\right),$$
$$\mathbf{B}_\mathrm{I}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{I} \times \mathbf{E}_\mathrm{I}(\mathbf{r}, t),$$

où $\mathbf{E}_{0,\mathrm{I}}$ est l'amplitude du champ électrique incident, et où $v_1 = c/n_1$ est la vitesse de l'onde électromagnétique dans le milieu 1 ($z < 0$) avec c la vitesse de la lumière. Dans la suite, on appellera $v_2 = c/n_2$ la vitesse de propagation dans le milieu 2 ($z > 0$). On écrit pour les champs électriques et magnétiques associés à l'onde réfléchie et transmise

$$\mathbf{E}_\mathrm{R}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{0,\mathrm{R}} \exp\left(\mathrm{i}[\mathbf{k}_\mathrm{R}\cdot\mathbf{r} - \omega t]\right),$$
$$\mathbf{B}_\mathrm{R}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v_1}\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{R}(\mathbf{r},t),$$

et

$$\mathbf{E}_\mathrm{T}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{0,\mathrm{T}} \exp\left(\mathrm{i}[\mathbf{k}_\mathrm{T}\cdot\mathbf{r} - \omega t]\right),$$
$$\mathbf{B}_\mathrm{T}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v_2}\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{T} \times \mathbf{E}_\mathrm{T}(\mathbf{r},t),$$

respectivement, avec $\mathbf{k}_\mathrm{R}$ ($\mathbf{k}_\mathrm{T}$) le vecteur d'onde de l'onde réfléchie (transmise). On dénote par θ_I, θ_R et θ_T les angles que forment les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{I}$, $\mathbf{k}_\mathrm{R}$ et $\mathbf{k}_\mathrm{T}$ avec l'axe z (voir figure).

On rappelle qu'en l'absence de charge et de courant libre à la surface $z = 0$, la composante perpendiculaire à la surface du déplacement diélectrique $\mathbf{D}$, la composante tangentielle du champ électrique $\mathbf{E}$, la composante perpendiculaire du champ magnétique $\mathbf{B}$ et la composante tangentielle du champ auxiliaire $\mathbf{H}$ sont continues.

1/ À l'aide des conditions aux bords, montrez qu'en tout point appartenant à la surface de séparation entre les deux milieux ($z = 0$),

$$k_{\mathrm{I},x}x + k_{\mathrm{I},y}y = k_{\mathrm{R},x}x + k_{\mathrm{R},y}y = k_{\mathrm{T},x}x + k_{\mathrm{T},y}y,$$

où $k_{i,x}$ et $k_{i,y}$ sont les composantes selon x et y du vecteur $\mathbf{k}_i$, avec $i = \mathrm{I}, \mathrm{R}, \mathrm{T}$.

2/ En déduire les trois lois fondamentales de l'optique :

(i) Les vecteurs d'onde de l'onde incidente, réfléchie et transmise forment un plan, appellé plan d'incidence.

(ii) L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, $\theta_\mathrm{I} = \theta_\mathrm{R}$.

(iii) L'angle de l'onde transmise est relié à l'angle d'incidence par la loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin\theta_\mathrm{I} = n_2 \sin\theta_\mathrm{T}$.

3/ On suppose maitenant que l'onde incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, $\mathbf{E}_{0,\mathrm{I}} = E_{0,\mathrm{I}}\,\hat{\mathbf{y}}$. Représenter sur la figure de la page 1 les directions des champs électriques et magnétiques associés aux ondes incidente, réfléchie et transmise. Projeter les champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis sur les trois axes x, y, z.

4/ À l'aide des conditions aux bords, montrer que

$$E_{0,\mathrm{R}} = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}E_{0,\mathrm{I}},$$
$$E_{0,\mathrm{T}} = \frac{2}{1+\alpha\beta}E_{0,\mathrm{I}},$$

où $\alpha = \cos\theta_\mathrm{T}/\cos\theta_\mathrm{I}$ et $\beta = n_2/n_1$.

5/ Que vaut $E_{0,\mathrm{R}}$ et $E_{0,\mathrm{T}}$ pour les cas limites (i) $\theta_\mathrm{I} = 0$ (incidence normale) et (ii) $\theta_\mathrm{I} = \pi/2$ (incidence rasante). Commentez.

6/ Existe-t'il un angle d'incidence θ_B, appelé angle de Brewster, pour lequel il n'y a pas de réflexion, c'est-à-dire $E_{0,\mathrm{R}} = 0$? Commentez votre résultat.

7/ Calculer les vecteurs de Poynting associés aux ondes incidente, réfléchie et transmise. En projetant ces vecteurs sur l'interface $z = 0$, déterminer les intensités de chaque onde sur la surface de séparation entre les deux milieux.

8/ En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T. Vérifier que $T + R = 1$. Pour quelle raison physique a-t'on cette relation ?