Examen final

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1h30
Le sujet comprend 2 pages au total

Recommandation : *Les différentes parties de l'examen ne sont pas indépendantes. Il est donc suggéré de répondre aux questions les unes après les autres.*

Préliminaires : équations de Maxwell

Donner, en définissant soigneusement toutes les quantités introduites, l'expression des équations de Maxwell (i) sous leur forme générale et (ii) dans la matière.

1re partie : ondes électromagnétiques dans le vide

On considère l'espace vide infini et homogène, absent de toute charge et de courant. Dans la suite, on notera ϵ_0 et μ_0 la permittivité et la perméabilité du vide, respectivement.

1/ Montrer que les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ obéissent aux équations

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, que l'on explicitera en fonction de ϵ_0 et μ_0.

2/ En déduire que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ obéissent aux équations d'onde

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{2}$$

[*Rappel :* $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ pour tout champ de vecteur $\mathbf{v}$.]

3/ Vérifier que l'onde plane monochromatique linéairement polarisée de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{z}}$ se propageant selon z et de fréquence (angulaire) ω,

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \qquad \mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{3}$$

est solution des équations d'onde (2). Ici, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont des vecteurs indépendants du temps et de l'espace. Quelle est la relation de dispersion $\omega(k)$?

4/ Montrer à l'aide des equations de Maxwell (1) que

a/ les ondes électromagnétiques sont transverses à la direction de propagation z, c'est-à-dire montrer que les composantes selon z des vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont nulles

b/ et que

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0. \tag{4}$$

2e partie : ondes électromagnétiques dans un conducteur

On considère maintenant un milieu linéaire, infini, homogène et conducteur, de permittivité ϵ, perméabilité μ et conductivité σ. On admettra dans la suite que la densité volumique de charge libre $\rho_\mathrm{f} = 0$ et que la densité volumique de courant libre suit la loi d'Ohm $\mathbf{J}_\mathrm{f} = \sigma \mathbf{E}$.

1/ Montrer que sous ces hypothèses, les équations de Maxwell se réduisent à

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{5}$$

2/ En déduire que les champs **E** et **B** obéissent aux équations d'onde

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla^2\mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

3/ Vérifier que l'onde plane monochromatique (3) est également une solution des équations d'onde (6) à condition que k soit un nombre complexe. En particulier, on montrera que $k = k_+ + \mathrm{i}k_-$, avec

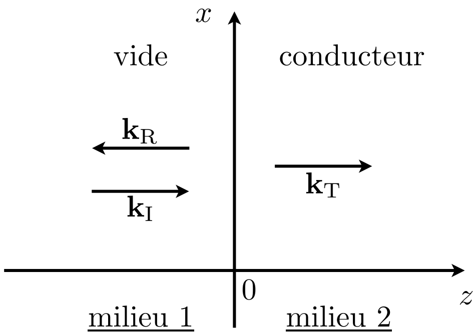
$$k_\pm = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \pm 1\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Donner l'interprétation physique de la quantité k_-^{-1}. Que devient cette quantité pour un conducteur parfait ?

Dans la suite du problème, on admettra que dans un conducteur, les ondes (3) sont également transverses, et qu'en supposant que $\mathbf{E}_0$ est polarisé selon $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B}_0 = (kE_0/\omega)\hat{\mathbf{y}}$.

3e partie : réflexion à la surface d'un conducteur

On considère maintenant la situation schématisée dans la figure ci-dessous : un milieu 1 apparenté au vide (permittivité ϵ_0, perméabilité μ_0) occupant l'espace $z < 0$ et un milieu 2 linéaire et conducteur (permittivité ϵ, perméabilité μ, conductivité σ) occupant l'espace $z > 0$. Une onde plane monochromatique de fréquence ω et polarisée selon la direction x arrive à incidence normal (vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{I} = k_1\,\hat{\mathbf{z}}$) du milieu 1 vers le milieu 2. Dans la suite, on notera $\mathbf{k}_\mathrm{R} = -k_1\,\hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{k}_\mathrm{T} = k_2\,\hat{\mathbf{z}}$ les vecteurs d'onde des ondes réfléchies et transmises, respectivement.



1/ À l'aide des résultats obtenus dans les 1re et 2e parties du problème, donner l'expression des champs électrique et magnétique incidents, réfléchis et transmis en fonction des amplitudes des champs électriques incident ($E_{0,\mathrm{I}}$), réfléchi ($E_{0,\mathrm{R}}$) et transmis ($E_{0,\mathrm{T}}$). Compléter le schéma ci-dessus en représentant ces champs électromagnétiques.

2/ À l'aide des relations de passage

$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \qquad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel,$$
$$B_1^\perp = B_2^\perp, \qquad \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^\parallel, \tag{8}$$

avec ϵ_n et μ_n les permittivités et perméabilités dans le milieu $n(=1,2)$, et $E_n^\perp/B_n^\perp$ et $\mathbf{E}_n^\parallel/\mathbf{B}_n^\parallel$ les composantes perpendiculaire et tangentielles à l'interface séparant les milieux 1 et 2 des champs électriques/magnétiques, déterminer $E_{0,\mathrm{R}}$ et $E_{0,\mathrm{T}}$ en fonction de $E_{0,\mathrm{I}}$ et de $\beta = \mu_0 c k_2/\mu\omega$.

3/ Que deviennent ces expressions si l'on suppose que le milieu 2 est composé d'un conducteur parfait ($\sigma \to \infty$) ? Donner une interprétation physique de ce phénomène.