# Examen – 1re session

*Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.*
*Durée de l'épreuve : 2h*
*Le sujet comprend 3 pages au total.*

## 1re partie : questions de cours

On considère un milieu diélectrique linéaire et homogène, de permittivité $\epsilon$ et de perméabilité $\mu$, en l'absence de toute charge et courant libres. Dans la suite, on notera $\epsilon_0$ et $\mu_0$ la permittivité et la perméabilité du vide, respectivement.

1/ En partant des équations de Maxwell dans la matière que l'on explicitera, montrez que les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ obéissent aux équations

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

2/ En déduire que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ obéissent aux équations d'onde

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{5a}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \tag{5b}$$

avec $v$ la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique, que l'on exprimera en fonction de la vitesse de la lumière $c$ et de l'indice de réfraction $n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$ du milieu.
[*Rappel :* $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ pour tout champ de vecteur $\mathbf{v}$.]

3/ Vérifiez que l'onde plane monochromatique linéairement polarisée de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{z}}$ se propageant selon $z$ et de fréquence (angulaire) $\omega$,

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)},$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)},$$

est solution des équations d'onde (5). Ici, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont des constantes indépendantes du temps et de l'espace. De plus, on a adopté la notation complexe, les champs physiques étant donnés par $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}\}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mathrm{Re}\{\mathbf{B}\}$. Quelle est la relation de dispersion $\omega(k)$ ?

4/ Montrez à l'aide des Eqs. (1) et (2) que les ondes électromagnétiques sont transverses à la direction de propagation $z$, c'est-à-dire montrez que les composantes selon $z$ des vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont nulles ($E_{0,z} = 0$, $B_{0,z} = 0$).

5/ Montrez à l'aide de la loi de Faraday (3) que

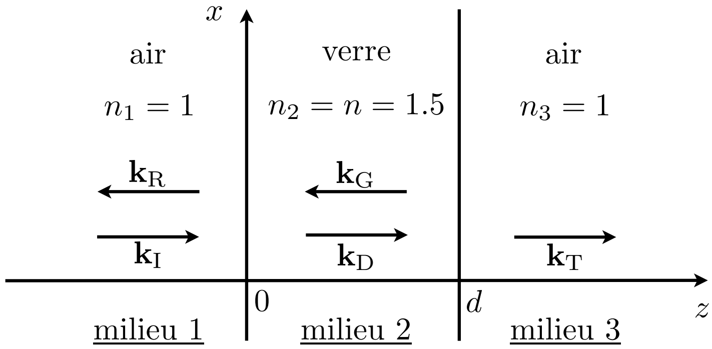
$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{v}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0.$$

6/ Dans la suite, on supposera que l'onde électromagnétique est polarisée selon $x$, c'est-à-dire que $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{\mathbf{x}}$. Représentez les vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$.

7/ Calculez le vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}/\mu$ et en déduire que l'intensité $I$ de l'onde plane a pour expression

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v |E_0|^2. \tag{6}$$

## 2$^{e}$ partie : transmission de la lumière à travers une vitre




On considère maintenant la situation schématisée dans la figure ci-dessus : de la lumière monochromatique (de fréquence $\omega$) arrive à incidence normale du milieu 1 composé d'air que l'on apparentera au vide (indice de réfraction $n_1 = 1$), traverse le milieu 2 (du verre d'indice $n_2 = n = 1.5$), et passe dans le milieu 3 composé d'air, également apparenté au vide ($n_3 = 1$). Les trois milieux sont supposés être linéaire, homogène et non magnétique (perméabilités $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$). On cherche à montrer que le coefficient de transmission du milieu 1 au milieu 3 s'écrit

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(n^2-1)^2}{4n^2}\sin^2(nk_0 d)}, \tag{7}$$

où $k_0$ est le nombre d'onde de l'onde incidente, et $d$ l'épaisseur de la vitre (voir figure ci-dessus).

On précise que dans le milieu 1, on a une onde incidente (vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{I}$) et une onde réfléchie (vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{R}$) ; dans le milieu 2, il y a une onde se propageant vers la droite (vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{D}$) et vers la gauche (vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{G}$) ; dans le milieu 3, l'onde transmise a un vecteur d'onde $\mathbf{k}_\mathrm{T}$ (voir figure ci-dessus). Dans la suite, on notera $k_1 = |\mathbf{k}_\mathrm{I}| = |\mathbf{k}_\mathrm{R}|$, $k_2 = |\mathbf{k}_\mathrm{D}| = |\mathbf{k}_\mathrm{G}|$, et $k_3 = |\mathbf{k}_\mathrm{T}|$. Dans chaque milieu, le champ électromagnétique a donc pour expression (cf. 1$^{re}$ partie)

$$\underline{\text{milieu 1}}\ (z<0) : \begin{cases} \mathbf{E}_\mathrm{I}(z,t) = E_{0,\mathrm{I}}\, e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_\mathrm{I}(z,t) = \dfrac{E_{0,\mathrm{I}}}{v_1}\, e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{E}_\mathrm{R}(z,t) = E_{0,\mathrm{R}}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_\mathrm{R}(z,t) = -\dfrac{E_{0,\mathrm{R}}}{v_1}\, e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

$$\underline{\text{milieu 2}}\ (0<z<d) : \begin{cases} \mathbf{E}_\mathrm{D}(z,t) = E_{0,\mathrm{D}}\, e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_\mathrm{D}(z,t) = \dfrac{E_{0,\mathrm{D}}}{v_2}\, e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{E}_\mathrm{G}(z,t) = E_{0,\mathrm{G}}\, e^{i(-k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_\mathrm{G}(z,t) = -\dfrac{E_{0,\mathrm{G}}}{v_2}\, e^{i(-k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

$$\underline{\text{milieu 3}}\ (z>d) : \begin{cases} \mathbf{E}_\mathrm{T}(z,t) = E_{0,\mathrm{T}}\, e^{i(k_3 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}_\mathrm{T}(z,t) = \dfrac{E_{0,\mathrm{T}}}{v_3}\, e^{i(k_3 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Notez que l'on a supposé que la polarisation de l'onde incidente est selon $x$.

8/ À l'aide de vos résultats de la 1$^{re}$ partie, montrez que $v_1 = v_3 = c$ et que $v_2 = c/n$. Montrez également que $k_1 = k_3 \equiv k_0$ et que $k_2 = nk_0$.

9/ En vous servant des conditions aux bords en $z = 0$ et en $z = d$, montrez que les différentes amplitudes du champ électrique sont reliées par

$$E_{0,\mathrm{I}} + E_{0,\mathrm{R}} = E_{0,\mathrm{D}} + E_{0,\mathrm{G}}, \tag{8}$$

$$E_{0,\mathrm{I}} - E_{0,\mathrm{R}} = n(E_{0,\mathrm{D}} - E_{0,\mathrm{G}}), \tag{9}$$

$$E_{0,\mathrm{D}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nk_0d} + E_{0,\mathrm{G}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nk_0d} = E_{0,\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d}, \tag{10}$$

$$E_{0,\mathrm{D}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nk_0d} - E_{0,\mathrm{G}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nk_0d} = \frac{1}{n}E_{0,\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d}. \tag{11}$$

On rappelle que les composantes des champs **E** et **B** tangentielles aux interfaces entre les différents milieux sont continues.

10/ À l'aide des Eqs. (10) et (11), obtenez tout d'abord des expressions pour $E_{0,\mathrm{D}}$ et $E_{0,\mathrm{G}}$ en fonction de $E_{0,\mathrm{T}}$. En vous servant ensuite des Eqs. (8) et (9), en déduire que l'amplitude du champ incident et transmis sont reliés par

$$E_{0,\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d}}{2}E_{0,\mathrm{T}}\left[2\cos\left(nk_0d\right) - \mathrm{i}\left(n + \frac{1}{n}\right)\sin\left(nk_0d\right)\right]. \tag{12}$$

11/ Déduisez de l'Eq. (12) que le coefficient de transmission du milieu 1 au milieu 3, $T = I_\mathrm{T}/I_\mathrm{I}$, où $I_\mathrm{I}$ et $I_\mathrm{T}$ sont les intensités des ondes électromagnétiques incidente et transmise, est donné par l'Eq. (7). Afin d'obtenir ce résultat, on s'aidera de l'Eq. (6).

12/ Représentez schématiquement le coefficient de transmission $T$ en fonction de $k_0d$.

**Bon courage !**