Examen final

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1h30
Le sujet comprend 2 pages au total

1 Distribution de charges à symétrie sphérique

On considère une distribution de charge à symétrie sphérique dont la densité volumique de charge s'écrit

$$\rho(r) = K\frac{\mathrm{e}^{-r/\ell}}{r},$$

où r est la distance de l'origine O du repère au point P de l'espace réel tridimensionnel ($\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$), avec K et ℓ des constantes. Cette distribution de charges résulte en un champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, avec $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. On cherche dans la suite à déterminer $E(r)$.

1/ Quelles sont les dimensions de ℓ et K ?

2/ Montrer que

$$\int \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}(x+1) + \text{constante}.$$

3/ Calculer la charge totale Q du système. En déduire l'expression de la constante K en fonction de Q et ℓ.

4/ Calculer le champ électrostatique dans tous l'espace (on exprimera le résultat en fonction des constantes Q et ℓ).

5/ Déterminer $E(r=0)$ et $\lim_{r\to\infty} E(r)$.

6/ Tracer $E(r)$ en fonction de r.

2 Spire dans un champ magnétique alternatif

Une spire circulaire de rayon a et de résistance R, centrée en O et se situant dans le plan (Oxy), est placée dans un champ magnétique spatialement uniforme, perpendiculaire au plan de la spire et variant sinusoïdalement au cours du temps : $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}$, avec $\hat{\mathbf{z}}$ le vecteur unitaire selon z.

1/ Calculer le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique $\mathbf{B}(t)$ au travers de la spire.

2/ En déduire la force électromotrice (f.e.m.) $\mathcal{E}(t)$ dans la spire.

3/ Déterminer le courant induit $I(t)$ dans la spire.

4/ Tracer $\Phi(t)$ et $I(t)$ en fonction du temps. Votre résultat est-il en accord avec la loi de Lenz, que l'on énoncera ?

5/ On considère maintenant que le champ magnétique est spatialement *non-uniforme* et a pour expression en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) \sin^2(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Reprendre les questions 1/ à 3/ ci-dessus.

On donne (démonstration = +1 point) :

$$\int \mathrm{d}u\; u\cos u = \cos u + u \sin u + \text{constante}.$$

3 Ondes électromagnétiques dans le vide

On considère l'espace vide infini et homogène, absent de toute charge et de courant. Les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ obéissent alors aux équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ϵ_0 et μ_0 représentent la permittivité et la perméabilité du vide, respectivement.

1/ Montrer que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ obéissent aux équations d'onde

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \tag{3.2}$$

où l'on exprimera la vitesse de la lumière dans le vide c en fonction de ϵ_0 et μ_0.
[*Rappel :* $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ pour tout champ de vecteur $\mathbf{v}$.]

2/ Vérifier que l'onde plane monochromatique linéairement polarisée de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{z}}$ se propageant selon z et de fréquence (angulaire) ω,

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \qquad \mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)},$$

est solution des équations d'onde (3.2). Ici, $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont des vecteurs indépendants du temps et de l'espace. Quelle est la relation de dispersion $\omega(k)$?

3/ Montrer à l'aide des equations de Maxwell (3.1) que

a/ les ondes électromagnétiques sont transverses à la direction de propagation z, c'est-à-dire montrer que les composantes selon z des vecteurs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ sont nulles

b/ et que

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0.$$