Examen

Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.
Durée de l'épreuve : 2h
Le sujet contient 2 pages au total

Questions de cours

Soit un système à un degré de liberté décrit par le lagrangien $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$.

(a) Donner l'expression du moment p conjugué à la variable q.

(b) Donner la définition du hamiltonien $H(q,p,t)$.

(c) Donner les équations de Hamilton. Démontrer, par la méthode de votre choix, ces équations.

Exercice 1

On considère le pendule double représenté à la Fig. 1 constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2, que l'on suppose *égales* ($m_1 = m_2 = m$) et de deux tiges rigides de *même longueur* $l_1 = l_2 = l$ (dont on néglige les masses), placé dans le champ de pesanteur d'accélération g. On suppose que les deux masses oscillent dans le même plan vertical. On néglige tout frottement de l'air. Soient θ_1 et θ_2 les angles que forment les masses m_1 et m_2 avec la verticale.

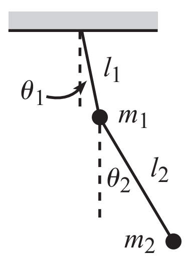

Figure 1

(a) Montrer que le lagrangien du système s'écrit comme[1]

$$\mathcal{L} = ml^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

(b) En déduire les équations du mouvement.

(c) Dans la limite des petits angles ($\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$), montrez que les équations du mouvement se réduisent à

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{2g}{l}\theta_1 = 0,$$
$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0.$$

Exercice 2

On considère le système de la Fig. 2 constitué de deux masses ponctuelles de même masse m, placés dans le champ de pesanteur d'accélération g. On néglige tout frottement de l'air. Les deux masses sont reliées par un fil de longueur L et de masse négligeable via deux poulies (de tailles négligeables). Soit ℓ la distance de séparation entre les deux poulies. La masse de gauche peut se mouvoir uniquement verticalement, alors que la masse de droite est libre d'osciller dans le plan formé par les masses et les poulies.

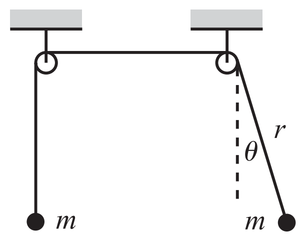

Figure 2

1. On rappelle que $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

(a) Étant données les contraintes sur les deux masses énoncées ci-dessus, justifier du fait que le système n'a que deux degrés de liberté et est complètement décrit par les deux coordonnées généralisées r et θ (voir Fig. 2).

(b) Montrer que le lagrangien du système s'exprime comme

$$\mathcal{L} = m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgr(\cos\theta - 1).$$

(c) En déduire les équations du mouvement.

Exercice 3

On considère une particule ponctuelle (non relativiste) de masse m placée dans un potentiel central $V(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, avec (x, y, z) les coordonnées cartésiennes. On note $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ la vitesse et v^2 son carré. On étudie le problème en coordonnées sphériques (r, θ, φ), définies par

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

(a) Montrer que le lagrangien du système est donné en coordonnées sphériques par

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

(b) Calculer les moments p_r, p_θ, et p_φ conjugués, respectivement, aux coordonnées généralisées r, θ, et φ.

(c) Quelle coordonnée généralisée est cyclique ? Quelle est la quantité conservée associée (et pour quelle raison de symétrie) ? Montrer que cette quantité correspond au moment cinétique L_z selon z.

(d) En déduire le hamiltonien H du système.

Exercice 4

Soit le lagrangien

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\dot{y} - \frac{\gamma}{2}(y\dot{x} - x\dot{y}) - \omega^2 xy,$$

où x et y sont deux variables généralisées, et où γ et ω sont des constantes réelles et positives.

(a) Écrire les deux équations de Lagrange pour ce système. Laquelle de ces deux équations décrit l'évolution temporelle d'un système physique dissipatif ?

(b) Calculer la fonction $E(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ telle que définie en cours. Cette quantité est-elle conservée (on justifiera la réponse) ?

(c) En déduire le hamiltonien $H(x, y, p_x, p_y)$, où p_x et p_y sont, respectivement, les moments conjugués aux variables x et y.

(d) Expliciter les quatre équations de Hamilton.