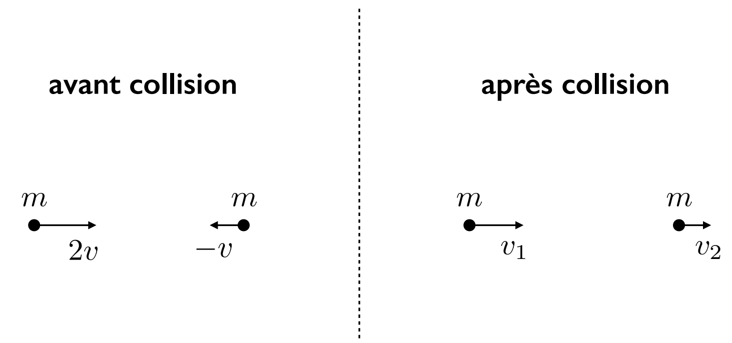
Contrôle continu n° 2

Aucun document, téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés
Durée de l'épreuve : 1 h 30 min
Le sujet comprend 3 pages au total

Exercice 1

On considère le choc élastique unidimensionnel de deux particules non-relativistes de même masse m, considérées comme ponctuelles. Avant le choc des deux particules, la masse de gauche en mouvement rectiligne uniforme vers la droite a une vitesse $2v$, alors que la masse de droite (en mouvement rectiligne uniforme vers la gauche) a une vitesse $-v$. On appelle v_1 et v_2 les vitesses des particules de gauche et droite après le choc, avec v_1 et v_2 comptées positives vers la droite (voir figure ci-dessous). Dans la suite, on néglige l'attraction gravitationnelle entre les deux masses et on suppose que la collision a lieu dans le vide.



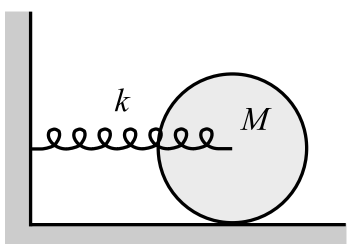
Question : Calculez les vitesses v_1 et v_2 des deux particules après le choc.

Exercice 2

On considère un cylindre plein de rayon R, de hauteur L, de masse M et de densité volumique de masse uniforme ρ.

(a) Montrez que le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de révolution s'écrit $I = \beta M R^2$, où β est une constante que l'on déterminera. On détaillera soigneusement sur un schéma le système de coordonnées utilisé.

On considère maintenant qu'un ressort de constante de raideur k est attaché au centre de masse du cylindre, et qu'il relie celui-ci à un mur (voir figure ci-dessous).



(b) On suppose que le cylindre roule sur le sol sans glisser. Quelle est la force, que l'on notera f, à l'origine de ce phénomène ?

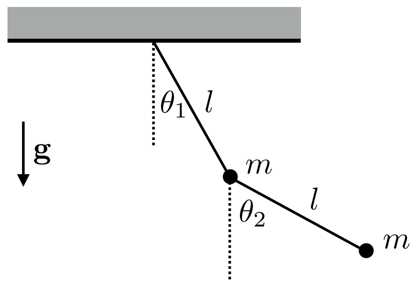
(c) Donnez une relation entre l'accélération linéaire a du cylindre et son accélération angulaire que l'on dénotera α. Justifiez soigneusement votre réponse.

(d) Rappelez sans justification l'équation reliant le couple τ exercé sur le cylindre à son moment d'inertie I et à son accélération angulaire α. En déduire une expression de f en fonction de M et a.

(e) Montrez que l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre correspond à celle d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω, que l'on exprimera en fonction de k et M.

Exercice 3

On considère le pendule double représenté ci-dessous constitué de deux particules ponctuelles de même masse m et de deux tiges rigides de même longueur l (dont on néglige les masses), placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\mathbf{g}$. On suppose que les deux masses oscillent dans le même plan vertical. On néglige tout frottement de l'air. Soient θ_1 (θ_2) l'angle que forme la masse du haut (du bas) avec la verticale.



(a) Montrer que le lagrangien du système s'écrit comme

$$\mathcal{L} = ml^2 \left[\dot{\theta}_1^2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

(b) En déduire les équations du mouvement.

(c) Dans la limite des petits angles ($\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$), montrez que les équations du mouvement se réduisent à

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{2g}{l}\theta_1 = 0,$$
$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0.$$

(d) Initialement, à $t = 0$, on suppose que $\theta_1(0) = 0$ et $\theta_2(0) = \epsilon$, avec $\epsilon \ll 1$. Déterminez les accélérations angulaires des deux masses du double pendule à $t = 0^+$, c'est-à-dire immédiatement après le lâcher.

Exercice 4

On considère une particule ponctuelle de masse m soumise à une force centrale qui, par définition, est une force qui pointe de façon radiale et dont l'amplitude ne dépend que de la distance r à la source, que l'on place à l'origine du repère, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}$. De façon équivalente, une force centrale est telle que le potentiel associé prend la forme $V(\mathbf{r}) = V(r)$.

(a) Montrez que le moment cinétique $\mathbf{L}$ de la particule (par rapport à l'origine du repère) est conservé.

(b) En déduire que le mouvement de la particule est planaire.

(c) Dans la suite, on appelle ce plan $(0xy)$ et on dénote r et θ les coordonnées polaires usuelles dans ce plan. On rappelle que la vitesse et l'accélération de la particule ont alors pour expressions

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}},$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Montrez que les équations du mouvement s'écrivent

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \tag{1}$$

(d) Montrez que l'Eq. (1) correspond à la conservation du moment cinétique.

(e) En déduire que l'énergie du système s'écrit

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \tag{2}$$

où le potentiel effectif est défini comme

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r).$$

(f) On considère désormais que la particule est soumise à un potentiel de la forme

$$V(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2},$$

où L_0 est une constante. En vous aidant de l'Eq. (2), en déduire $r(t)$ en fonction du temps t. On prendra comme conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$, et l'on introduira comme notation $\tilde{L} = (L^2 + L_0^2)^{1/2}$. Vous exprimerez votre résultat final en fonction de $\tilde{L}$, m, r_0, et t.