Examen

Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.
Durée de l'épreuve : 2h
Le sujet contient 3 pages au total

Exercice 1

Soit une particule décrite par une coordonnée généralisée q et de lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, avec $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

(a) Écrire l'équation d'Euler–Lagrange correspondante.

(b) Quelle est la définition du moment p conjuguée à q ?

(c) Quelle est la définition du hamiltonien $H(q, p, t)$ correspondant ?

(d) Écrire de deux façons différentes la différentielle totale $\mathrm{d}H(q, p, t)$ du hamiltonien. En déduire les équations de Hamilton. Quelle est la troisième équation que vous obtenez ?

(e) Soit $f(q, p, t)$ une fonction scalaire quelconque. Montrez que

$$\frac{\mathrm{d}f(q,p,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + \{f(q,p,t), H(q,p,t)\} ,$$

où $\{.,.\}$ dénote les crochets de Poisson, que vous définierez soigneusement.

(f) Soit $g(q, p)$ une fonction scalaire quelconque qui ne dépend pas explicitement du temps. Déduire de la question précédente qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $g(q, p)$ soit une quantité conservée est que $\{g(q, p), H(q, p, t)\} = 0$.

Exercice 2

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de fréquence ω, dont le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, \tag{1}$$

où les variables q et p sont conjuguées.

(a) Montrez que la transformation

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}} \left(\sqrt{m\omega} q - \frac{\mathrm{i}p}{\sqrt{m\omega}} \right) ,$$
$$P = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}} \left(\sqrt{m\omega} q + \frac{\mathrm{i}p}{\sqrt{m\omega}} \right)$$

est canonique.

(b) Exprimez le hamiltonien (1) en fonction de Q et P.

(c) Déterminez les équations du mouvement pour Q et P, et résolvez ces équations en supposant que $Q(t = 0) = Q_0$ et $P(t = 0) = P_0$.

(d) En déduire $q(t)$ et $p(t)$.

Exercice 3

On considère le système de la Fig. 1 : dans le champ de gravitation (accélération de la pesanteur $\mathbf{g}$), une masse ponctuelle M se situe sur un plan incliné (d'angle α). À cette masse est attaché un pendule simple, de longueur constante ℓ et de masse m (également ponctuelle). Dans la suite, on néglige toute friction, et l'on suppose que le mouvement a lieu dans le plan $(0xy)$.

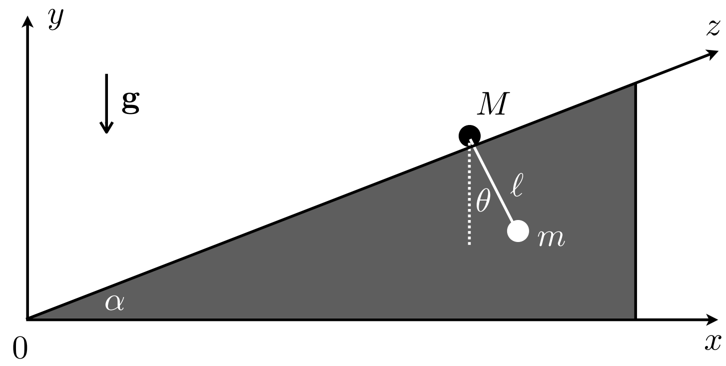

FIGURE 1

(a) Déterminez les positions $(x, y)_M$ et $(x, y)_m$ des deux masses M et m en fonction de z (position de la masse M le long du plan incliné), de l'angle θ que fait la masse m avec la verticale, et de l'angle α.

(b) Déterminez le lagrangien du système en fonction des coordonnées généralisées z et θ.

(c) En déduire les équations du mouvement.

(d) En déduire qu'un point d'équilibre du pendule est tel qu'il soit perpendiculaire au plan incliné.

Exercice 4

(a) À l'aide des équations d'Euler–Lagrange, montrez que le lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t), \tag{2}$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$, et où $\phi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sont, respectivement, le potentiel électrostatique et le potentiel vecteur, correspond à celui d'une particule ponctuelle de masse m et de charge q placée dans un champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}$. On rappelle que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

(b) Calculez les moments conjugués $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ aux coordonnées $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Est-ce que $\mathbf{p}$ correspond à la quantité de mouvement de la particule ?

(c) En déduire le hamiltonien correspondant au lagrangien (2).

Exercice 5

Montrez, grâce à un principe variationnel, que le chemin le plus court entre deux points A et B situés sur un plan est la ligne droite.

Exercice 6

On considère la machine d'Atwood de la Fig. 2, constituée de trois masses ponctuelles m, $2m$ et $3m$ reliées via des poulies par un câble non-élastique. On néglige dans la suite la masse des poulies, ainsi que celle du câble. Soient x et y les hauteurs respectivement des masses de gauche et de droite par rapport à la situation où les trois masses sont à la même altitude.

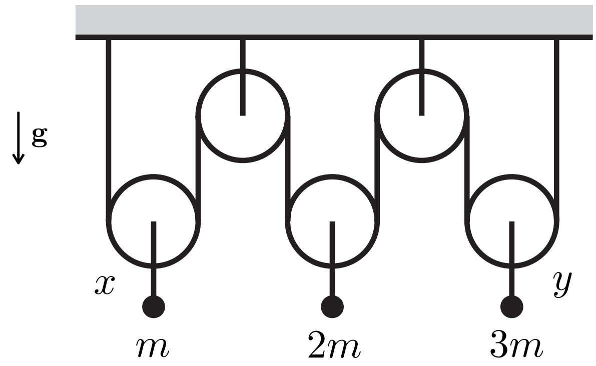

FIGURE 2

(a) Déterminez le lagrangien du système en fonction des deux coordonnées généralisées x et y.

(b) Par quelle transformation infinitésimale le lagrangien de la question précédente est-il invariant.

(c) En déduire le moment conservé P du système.

(d) Vérifiez votre résultat à l'aide des équations d'Euler–Lagrange.

(e) Déterminez le hamiltonien du système.