TD 5
Mécanique lagrangienne

1 Équations d'Euler–Lagrange

Exercice 1

Un pendule est constitué d'une masse m ponctuelle et d'une tige rigide de longueur l. Le support du pendule oscille horizontalement, avec une position donnée par $x_s(t) = x_0 \cos(\omega t)$ (voir Fig. 1). On cherche dans cet exercice à déterminer l'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec la verticale.

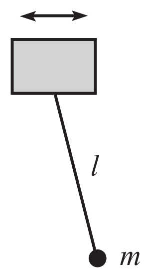

FIGURE 1

(a) Écrire le lagrangien du système.

(b) En déduire l'équation du mouvement.

(c) Résoudre cette équation dans la limite $\theta \ll 1$. On posera comme conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Exercice 2

Un bloc de masse m est maintenu immobile sur un plan incliné de masse M et d'angle d'inclinaison θ (voir Fig. 2). Le plan incliné est initialement au repos sur une surface horizontale. Dans la suite, on néglige toutes forces de friction entre le bloc et le plan incliné, et le plan incliné et la surface horizontale. On lâche alors le bloc. On cherche dans cet exercice à déterminer l'accélération horizontale du plan incliné.

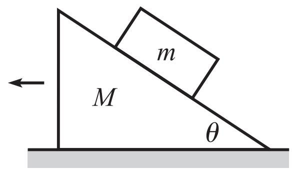

FIGURE 2

(a) Soient x_1 la coordonnée horizontale du plan incliné (avec $x_1 > 0$ vers la gauche) et x_2 la coordonnée horizontale du bloc (avec $x_2 > 0$ vers la droite). Montrez que la distance verticale dont tombe le bloc est $(x_1 + x_2) \tan\theta$.

(b) Déterminez l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système total (bloc + plan incliné). En déduire le lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

(c) À l'aide des équations d'Euler–Lagrange, déterminez les équations du mouvement du système.

(d) En déduire l'accélération horizontale $\ddot{x}_1$ du plan incliné.

(e) Pour m et M donnés, quel est l'angle θ_0 qui maximise $\ddot{x}_1$? Discutez les cas limites $m \ll M$ et $m \gg M$.

Exercice 3

Deux tiges sans masse de longueur $2r$, chacune ayant une masse m fixée en leurs milieux, sont reliées par un bras articulé. L'une des tiges se situe au-dessus de l'autre, comme le montre la Fig. 3. La tige du dessous est elle-même reliée au sol par un bras articulé. Les deux tiges sont maintenues de telle sorte que la tige du bas soit verticale, alors que celle du haut forme un angle ε avec la verticale. Les tiges sont alors lâchées. À cet instant, on cherche à déterminer les accélérations angulaires des deux tiges. On se placera dans la limite où $\varepsilon \ll 1$.

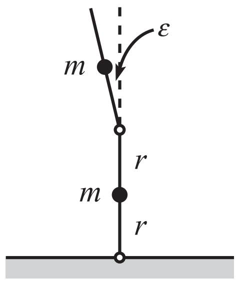

FIGURE 3

(a) Soient θ_1 (θ_2) l'angle que forme la tige du bas (du haut) avec la verticale juste après le lâcher. Déterminez les positions (en coordonnées cartésiennes) des deux masses.

(b) En déduire l'énergie potentielle du système.

(c) Quelle est l'énergie cinétique de la masse du bas ? Du haut ?

(d) En supposant que $\theta_1 \ll 1$ et $\theta_2 \ll 1$, montrez que le lagrangien du système s'écrit

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}mr^2\left(5\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mgr\left(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right).$$

(e) Écrire les équations du mouvement et en déduire $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$ juste après le lâcher.

2 Principe d'action stationnaire

Exercice 1

On considère l'action S, d'un temps $t = 0$ à $t = 1$, d'une masse ponctuelle m dans le champ gravitationnel, initialement au repos et lâchée à l'instant initial de l'origine du repère. On néglige les frottements. D'après les équations d'Euler–Lagrange, nous savons que la trajectoire de la masse, donnée par $y(t) = -gt^2/2$, où g est l'accélération de la pesanteur, correspond à une valeur stationnaire de l'action. Montrez que la fonction $y(t) = -gt^2/2 + \epsilon t(t-1)$ donne une action qui n'a pas de dépendance linéaire en ϵ.

Exercice 2

On lance en l'air (vers le haut) un ballon (considéré comme une masse ponctuelle m) et l'on suppose que la trajectoire est de la forme $z(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$. On néglige tout frottement de l'air.

(a) En supposant que $z(0) = z(T) = 0$, montrez que $z(t) = a_2(t^2 - Tt)$.

(b) Calculez l'action entre les instants $t = 0$ et $t = T$, et montrez que celle-ci est minimale lorsque $a_2 = -g/2$, où g est l'accélération de la pesanteur.

3 Forces de contrainte

Exercice 1

Une particule ponctuelle de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontal. Déterminez, grâce à la méthode vue en cours, la force de contrainte F qu'exerce le plan incliné sur la particule, de deux façons différentes :

(a) en utilisant les coordonnées généralisées le long du plan incliné (w) et perpendiculaire au plan (z) ;

(b) en utilisant les coordonnées cartésiennes horizontale (x) et verticale (y).

Exercice 2

Une perle de masse m glisse sans frottement avec une vitesse v le long d'un cerceau de rayon R. En ignorant le champ de pesanteur, déterminez la force de contrainte qu'exerce le cerceau sur la perle.

Exercice 3

On considère la machine d'Atwood de la Fig. 4 constituée de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 reliées via une poulie par un fil non-élastique. On néglige dans la suite la masse de la poulie, ainsi que celle du fil. Déterminez la tension F qu'exercent les deux masses sur le fil.

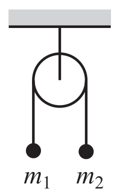

FIGURE 4

4 Petites oscillations

Exercice 1

Une perle de masse m est libre de glisser sans frottement sur un cerceau de rayon R dans le champ gravitationnel (accélération de la pesanteur g). Le cerceau est en rotation autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω constante, comme le montre la Fig. 5.

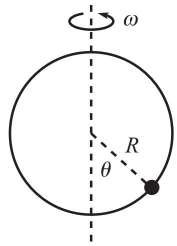

FIGURE 5

(a) Montrez que l'équation du mouvement pour l'angle θ (voir Fig. 5) s'écrit

$$R\ddot{\theta} = R\omega^2 \sin\theta\cos\theta - g\sin\theta.$$

(b) Déterminez les positions d'équilibre stable de la perle.

Exercice 2

On considère le système de la Fig. 6 : un pendule, constitué d'une tige rigide de longueur l dont on néglige la masse, et d'une masse ponctuelle m, est accroché à un support de masse M libre de glisser sans frottement sur un rail horizontal.

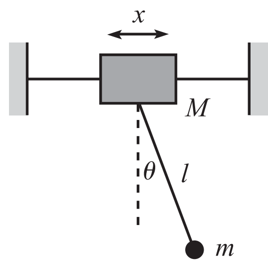

FIGURE 6

(a) Montrez que les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0,\\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

(b) Résoudre les équations du mouvement dans la limite des petits angles ($\theta \ll 1$).

5 Mécanique lagrangienne du solide indéformable

Un rectangle uniforme de masse m, de hauteur $2a$ et de largeur $2b$ se trouve au repos au sommet d'un cylindre fixe de rayon R (voir Fig. 7). Soit I le moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe de rotation perpendiculaire au rectangle et passant par son centre de masse. On donne alors une pichenette infinitésimale au rectangle, afin que celui-ci « roule » sur le cylindre. La friction entre le rectangle et le cylindre est telle que le rectangle ne glisse pas sur le cylindre.

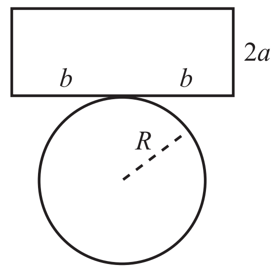

FIGURE 7

(a) Déterminez la position du centre de masse du rectangle en fonction des paramètres du problème et de l'angle θ que fait le point de contact cylindre–rectangle et la verticale par rapport au centre du cylindre.

(b) En déduire le lagrangien du système.

(c) Déterminez l'équation du mouvement du rectangle.

(d) À quelle condition le rectangle va-t'il effectuer des oscillations autour d'une position d'équilibre ? Déterminez dans ce cas la fréquence des petites oscillations autour du point d'équilibre. À quelle condition le rectangle va-t'il tomber du cylindre ?

6 Autres applications du principe variationnel

Exercice 1

Montrez, grâce à un principe variationnel, que le chemin le plus court entre deux points situés dans un plan est la ligne droite.

Exercice 2

Supposons que la vitesse de la lumière se propageant dans un certain matériau en forme de plaque soit proportionnelle à la hauteur au-dessus de la base de la plaque. Montrez que la lumière se propage en arc de cercle dans ce matériau (voir Fig. 8). Pour cela, vous utiliserez le *principe de Fermat*, qui stipule que la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale.

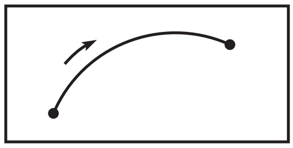

FIGURE 8

Exercice 3

On considère le problème de la *courbe brachistochrone* suivant : une perle dans le champ de pesanteur, initialement au repos, est lâchée de l'origine du repère cartésien le long d'un fil (on négligera le frottement) jusqu'à un certain point de l'espace $(x_\mathrm{f}, y_\mathrm{f})$, comme le montre la Fig. 9. On cherche à déterminer la forme que l'on doit donner au fil afin que la perle atteigne le point final en un temps minimal.

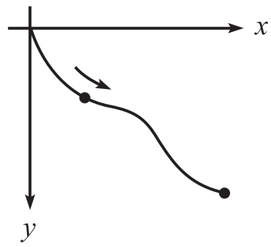

FIGURE 9

(a) On paramétrise la courbe avec la fonction $y(x)$, avec les y positifs pointant vers le bas, comme sur la Fig. 9. En vous aidant de la conservation de l'énergie, montrez que la vitesse de la perle est donnée par $v = \sqrt{2gy}$.

(b) Montrez que $y(x)$ obéit à l'équation différentielle

$$1 + y'^2 = \frac{B}{y}$$

avec $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ et où B est une constante.

(c) En déduire que x et y peuvent s'écrire sous forme paramétrique comme

$$x(\theta) = \frac{B}{2}\,(\theta - \sin\theta)\,,$$
$$y(\theta) = \frac{B}{2}\,(1 - \cos\theta)\,.$$

Quelle est cette courbe paramétrique ?